17108
3 cop.

Corpoica

CORPORACION COLOMBIANA DE INVESTIGACION AGROPECUARIA

SUBDIRECCION SISTEMAS DE PRODUCCION

PROGRAMA NACIONAL DE ESTUDIOS SOCIOECONOMICOS

MODELOS DE OPTIMIZACION APLICADOS A LA ECONOMIA AGRICOLA

USO DE LA PROGRAMACION LINEAL

Por: Francisco Acevedo Fonseca

Santafé de Bogotá, D.C. junio 28 de 1994

TABLA DE CONTENIDO

CONTENIDO DE GRAFICAS

Pág.

CORPORACION COLOMBIANA DE INVESTIGACION AGROPECUARIA
SUBDIRECCION SISTEMAS DE PRODUCCION
PROGRAMA NACIONAL DE ESTUDIOS SOCIOECONOMICO

MODELOS DE OPTIMIZACION APLICADOS A LA ECONOMIA AGRICOLA USO DE LA PROGRAMACION LINEAL

Por: Francisco Acevedo Fonseca

INTRODUCCION

El interés central de este trabajo es presentar en forma didáctica el tipo de problemas más frecuentes a que se enfrentan los agentes económicos ante la búsqueda permanente de una mayor eficiencia y rendimiento de su inversión. Particularmente, el empresario se enfrenta a la situación de asignar los recursos productivos, disponibles en cantidades limitadas, entre las diversas actividades posibles que puede realizar en su empresa.

Una asignación racional debe conducir a una óptima utilización de recursos en procura de alcanzar el máximo de ganancia posible. La técnica de Programación Lineal es un método eficaz que puede contribuir indirectamente a la búsqueda de ese propósito.

1. EL PROBLEMA DE LA DIETA

Supongamos que ud. es un investigador en nutrición animal de CORPOICA. que se enfrenta con el problema de determinar una dieta balanceada que cubra las necesidades nutritivas minimas para alimentar ganado de leche. obviamente al menor costo posible. Como datos objetivos se conoce que existen en el mercado una gran diversidad de granos y materias primas al igual que otros materiales vegetales y minerales que ofrecen potencialidad para ser utilizados como alimento para el ganado. Estos granos y materias primas tienen diferentes contenidos nutricionales y diferentes precios.

Se sabe que en el mercado existen **n** alimentos que se pueden seleccionar como son entre otros: sorgo, maiz, arroz,torta de algodón, torta de ajonjolí y azúcar. Estos alimentos se consumen en las cantidades x1, x2, x3.....xn, y se adquieren en el mercado con precios P1, P2, P3.....Pn.

La dieta balanceada debe contener **m** elementos nutritivos tales como calorías,vitaminas, minerales, fibra etc, que se encuentran disponibles en los **n** alimentos seleccionados.

Procedemos a denotar por **aij** el numero de unidades del elemento nutritivo i contenido en una unidad del alimento j. De esta manera tenemos que:

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots m.$

donde:

1= calorias 2= vitaminas 3= minerales..... m= fibra

$j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots n.$

donde:

1= sorgo 2= maíz 3= arroz...............n= azúcar

Especificamos la dieta mínima enumerando la mínima cantidad de cada elemento nutritivo que debe contener la ración. Denotamos estos mínimos por $b1, b2, b3, \ldots\ldots\ldots bm$.

1.1 Formulación del modelo

Con la notación indicada, el problema propuesto se puede formular en forma más precisa, de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lr}
a11x1 + a12x2 + a13x3 + \ldots\ldots\ldots + a1nxn \geq b1 & (1) \\
a21x1 + a22x2 + a23x3 + \ldots\ldots\ldots + a2nxn \geq b2 & (2) \\
a31x1 + a32x2 + a33x3 + \ldots\ldots\ldots + a3nxn \geq b3 & (3) \\
\vdots & \\
am1x1 + am2x2 + am3x3 + \ldots\ldots\ldots + amnxn \geq bm & (m)
\end{array}
$$

En forma más compacta, se pueden expresar las necesidades mínimas en la forma siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} aijxj >= bi \quad \textbf{para } i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, m$$

En la ecuación (1), el termino **a13x3** se interpreta en el sentido de que hay **a13x3** unidades del elemento nutritivo 1 contenidas en el consumo del alimento 3. En términos más generales, hay **aijxj** unidades del elemento nutritivo i en el consumo del alimento j. El termino de la derecha (b1) establece que se deben satisfacer las necesidades mínimas del elemento nutritivo 1. (ie calorias)

Las expresiones (1), (2), (3)...(m) imponen al investigador en nutrición m restricciones (un mínimo de calorías, proteínas, vitaminas, minerales, fibra etc). Sujeto a estas restricciones, se debe seleccionar los alimentos de la dieta en forma tal que se reduzca al mínimo costo.

El costo de comprar **x_j** unidades del alimento j es **$p_j x_j$**, con lo cual el costo de todos los alimentos consumidos es de:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \dots p_nx_n$$

En forma compacta el costo de todos los alimentos consumidos es de:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

Finalmente, el investigador deberá tener en cuenta que es imposible consumir una cantidad negativa de algún alimento, por lo cual se hace necesario incluir las restricciones de no negatividad:

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } J=1,\ 2,\ 3 \dots\dots n.$$

Con los elementos y condiciones anteriores el investigador puede plantear el problema de Programación Lineal:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad (1A)$$

$$\text{Sujeto a: } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \text{para } i = 1,\ 2,\ 3 \dots m \qquad (2A)$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{para } j = 1,\ 2,\ 3 \dots n \qquad (3A)$$

A la ecuación (1A) se le denomina **Función Objetivo**, y a las **x_j** se les denomina **variables de decisión.**

Al conjunto de inecuaciones (2A) se les llama **restricciones.**

A las expresiones (3A) se les conoce como **limitaciones de no negatividad.**

Un elemento importante de destacar en la formulación del modelo anterior se relaciona con los operadores lógicos. En efecto, el signo ≥ (mayor igual que) sirve para denotar particularmente aquellas situaciones donde la cantidad de un nutriente puede ser mayor a la requerida, sin que se afecte la composición de la dieta. En contraposición, el signo ≤ (menor igual que), sirve para indicar que la cantidad de un nutriente en particular no debe exceder la cantidad exigida en la formulación.

Cualquier conjunto de valores de las variables de decisión (xj) que satisfagan al conjunto de restricciones y a las limitaciones de no negatividad, se le llama una **solución factible**. Al conjunto particular de valores que satisfagan la Función Objetivo se les denomina **solución factible óptima**.

1.2 Definición del modelo de Programación Lineal

Dadas **m** desigualdades lineales con **n** variables de decisión, encontrar la solución factible óptima de la función objetivo, es decir, encontrar un conjunto de valores no negativos de las variables de decisión que satisfagan las restricciones y eleven al máximo o al mínimo alguna función lineal de estas variables.

2. OTROS PROBLEMAS DE DIETAS

2.1 Mezcla de fertilizantes

La formulación de dietas balanceadas tanto para humanos como para animales, donde se parte de un conjunto de alimentos los cuales aportan una serie de elementos nutritivos para determinar una dieta de mínimo costo, permite por analogía utilizar la técnica de Programación lineal para formular mezclas de fertilizantes a mínimo costo.

Como es de conocimiento, existen en el mercado una gran variedad de fuentes simples tales como nitrato de amonio, nitrato de potasio, sulfato de amonio, nitrato de amonio, úrea, cloruro de potasio, superfosfato triple, roca fosfórica etc. los cuales son fuentes de los elementos mayores de nitrógeno, fósforo y de potasio (N,P,K).

Partiendo del conocimiento técnico sobre las necesidades de nutrientes que cada cultivo requiere para su desarrollo, el investigador biofísico puede mediante la técnica de programación lineal determinar una fórmula de N, P,K a través de fuentes simples que respondan adecuadamente a un grado de concentración en particular y a mínimo costo.

Una estrategia orientada a reducir costos de fertilización en la agricultura colombiana deberá basarse principalmente en la búsqueda de alternativas que puedan sustituir y competir eficazmente con el uso de fertilizantes de grados comerciales como el 10-30-10, 15-15-15 etc, que el agricultor utiliza indiscriminadamente en sus cultivos.

Mediante el análisis de suelos y el conocimiento de los requerimientos de nutrientes específicos para cada cultivo en una región en particular, se abre la posibilidad de que el productor haga su propia mezcla de fertilizantes para obtener una fórmula específica que se adecue a las necesidades de su explotación. Dentro de este contexto, un productor de papa del Creced Hunza que requiere específicamente un fertilizante compuesto de grado 10 -20- 12, el cual no existe en el mercado, puede optar por hacer su propia mezcla, para lo cual cuenta con la información consignada en el cuadro 1.

CUADRO 1. Coeficientes técnicos y costo unitario de fertilizantes simples disponibles en el mercado para la formulación de una mezcla de fertilizantes grado 10-20-12 para el cultivo de papa en el Creced HUNZA.

	Sulfato de amonio a1	Nitrato de potasio a2	Cloruro de potasio a3	Urea a4	fosfato diamon. a5	Requerimiento bi
costo	8.00	40.00	8.00	11.00	10.50	
peso	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	≥ 1000
N	0.21	0.13	0.16	0.46	0.21	≥ 100
P					0.53	≥ 200
K		0.41	0.60			≥ 120

FUENTE: Adaptado de Acevedo F.F :Uso de la programación lineal en la formulación de fertilizantes en papa a mínimo costo.Bogotá 1978.

La información anterior está representada en forma matricial. Las columnas a1....a5 representan las variables de decisión. La primera fila señala el costo unitario($/kg) de cada una de las fuentes simples. La segunda fila estipula el peso unitario (Kg) de cada fuente. Las filas 3, 4 y 5 expresan los coeficientes técnicos, esto es, las cantidades de nutrientes N, P, K expresadas en porcentaje, que contiene cada fuente simple.

La columna b1, a la derecha de la matriz, indica la cantidad mínima de nutriente que debe contener la mezcla. En el ejemplo, se requiere un mínimo de 100 kg de N, 200 kg de P y 120 de K.

Función objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = 8a1 + 40a2 + 8a3 + 11a4 + 10.50a5$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
a1 + a2 + a3 + a4 + a5 &\geq 1000 \\
0.21a1 + 0.13a2 + 0.16a3 + 0.46a4 + 0.21a5 &\geq 100 \\
0.53a5 &\geq 200 \\
0.41a2 + 0.60a3 &\geq 120 \\
a1;\ a2;\ a3;\ a4;\ a5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2.2 Mezclas para alimentación de ganado

Dentro de las alternativas tecnológicas para la alimentación de rumiantes se encuentran los denominados "bloques nutricionales", los cuales consisten en una mezcla de diversas materias primas que sirven como fuentes de energía, proteína y minerales, principalmente. La bondad de esta tecnología es la de reciclar algunos subproductos de la agroindustria panelera que pueden utilizarse como alimentos para el ganado, entre los que se destacan el melote (cachaza deshidratada), el bagazo, el cogollo y las hojas de caña.

En recientes estudios se indica que la fórmula general de los bloques está compuesta por melote o melaza hasta un 50%, úrea 10% máximo, cal viva 10%, sal mineralizada 5% y fibra 25%. Esta proporción y composición puede variar dependiendo de las condiciones particulares de los ganaderos, de la disponibilidad de ingredientes, de la calidad y del precio de los mismos.

El sector privado viene promocionando la adopción de los bloques nutritivos, destacando que se trata de una tecnología relativamente barata, fácil de implementar tanto por pequeños como medianos ganaderos, para lo cual se utilizaría una amplia gama de subproductos agroindustriales, dentro de los cuales se destacan los siguientes:

1. RAF(residuos agrícolas fibrosos)
   - bagacillo de caña
   - bagazo
   - tamo
   - socas

2. Productos agroindustriales de la caña panelera
   - miel
   - melaza
   - melote (cachaza deshidratada)

2. Residuos de molinería
   - salvado de trigo
   - salvado de maíz
   - salvado de arroz
   - otros subproductos de la molinería

3. Pastos deshidratados y molidos

4. Subproductos animales
   - gallinaza
   - porquinaza
   - desechos de pesca
   - harina de sangre

5. Productos industriales
   - úrea
   - fosfato bicálcico
   - hidroxido de amonio
   - cloruro de sodio
   - trazos de minerales
   - drogas
   - cal viva
   - cemento

A través de la técnica de programación lineal, tanto el técnico como el ganadero tienen la posibilidad de determinar diversas formulaciones para la conformación de bloques nutricionales a mínimo costo, con la ventaja de que pueden ser adaptadas a las diferentes situaciones del productor, como son el tipo de ganado, la disponibilidad de las fuentes y el costo de las mismas. En el anexo 1 se presentan los coeficientes técnicos para algunos subproductos agroindustriales reportados por el Programa de Nutrición Animal del ICA, los cuales constituyen una base importante para la formulacion de dietas.

3. El problema del transporte

Este tipo de problema fue utilizado inicialmente con fines de estrategia militar y posteriormente tuvo su aplicación en la industria. Un caso particular es la existencia de **m** puntos de acopio de maiz y **n** centrales de abastos. Se conoce el costo de enviar una tonelada de maíz desde cada uno de los puntos de acopio hasta cada una de las centrales de abastos. El problema consiste en determinar las rutas de costo mínimo para el transporte de maíz entre los puntos de acopio y las centrales de abastos.

Denotamos por **x_{ij}** el número de toneladas de maíz que se envían del punto de acopio **i** a la central de abastos **j**. Dado que no se envían toneladas de maíz de las centrales de abastos a los puntos de acopio, $x_{ij} \geq 0$ (limitaciones de no negatividad de las variables de decisión). Denotamos por **a_i** el número de toneladas de maíz en el punto de acopio **i**, y por **b_j** el número de toneladas de maíz que se requieren en la central de abastos **j**.

Es claro que no se pude enviar de un punto de acopio más maiz del que allí se almacena. Dado que **a_i** es la cantidad disponible de maiz en el punto de acopio 1, tenemos que :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{1n} \leq a_1 ;$$

Asi mismo, la cantidad de maiz disponible en el punto de acopio 2 es de :

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + x_{2n} \leq a_2$$

En general, existe una restricción similar para todos los puntos de acopio de maiz:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad \textbf{para } i= 1,2,3,\ldots\ldots m$$

hay **m** de estas restricciones, una para cada punto de acopio.

De otra parte, se debe tener en cuenta lograr satisfacer las necesidades de cada una de las centrales de abastos. Dado que se requieren **b_1** toneladas de maiz en la central de abastos 1, tenemos que:

$$x11 + x21 + x31 + \ldots\ldots + xm1 = b1$$

Igualmente, se requieren **b2** toneladas de maíz en la central de abastos 2

$$x12 + x22 + x32 + \ldots\ldots + xm2 = b2$$

En forma más general,

$$\sum_{i=1}^{m} xij = bj \quad \text{para } j=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots n$$

De esta manera hay **n** restricciones para cada una de las centrales de abastos.

Denotamos por **cij** el costo de enviar una tonelada de maíz desde el punto de acopio **i** a la central de abastos **j**. El costo de enviar maíz del punto de acopio **1** a todas las centrales de abastos será:

$$c11x11 + c12x12 + c13x13 + \ldots\ldots + c1nx1n = \sum_{j=1}^{n} cijxij$$

o lo que es lo mismo, el costo unitario de transporte, multiplicado por el numero de toneladas enviadas y sumando los envios a todas las centrales de abastos. Por lo tanto, el costo de transporte de todos los puntos de acopio a todas las centrales de abastos sera:

$$Z=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} cijxij$$

La función objetivo del problema de programacion lineal propuesto es en consecuencia:

Reducir al mínimo costo $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} cijxij$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} xij \leq ai \quad \text{para } i=1,2,3\ldots\ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{para } j=1,2,3,\ldots.n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para } i=1,2,3,\ldots m;\ J=1,2,3,\ldots.n$$

4. La programación lineal como instrumento de planificación

Entre las aplicaciones importantes de la programación lineal en la economia de la empresa agropecuaria, es la que tiene que ver como herramienta de planificación y asignación de recursos. El empresario cuenta con una dotación de recursos (tierra, capital, mano de obra), mediante los cuales a través de una óptima combinación obtiene la producción de bienes y servicios para la sociedad.

Suponga que Ud. es un empresario agrícola que dispone de la siguiente información:

1. cuenta con 20 hectáreas de terreno mecanizable en clima frio.

2. Considera que la mejor opción económica que tiene para el primer semestre es dedicarse a producir papa ó zanahoria.

3. El costo del jornal es de $ 2.000

4. La papa requiere 110 jornales y la zanahoria 100 jornales por hetárea, con una disponibilidad máxima de 1800 jornales en el semestre.

5. Tiene una disponibilidad de 300 horas de máquina (tractor)

6. La papa requiere 5 horas máquina y la zanahoria de 7 horas máquina por hectárea.

7. Los costos variables son de: $ 500.000/ha para papa y de $ 600.000/ha para zanahoria.

8. Rendimiento: papa= 16.000 kg; zanahoria = 20.000 kg

9. Precio de venta: Papa =$ 80/kg; zanahoria= $ 80/kg

Con la informacion anterior, plantee el problema de optimizacion, para lo cual use las siguientes notaciones:

X1= No. de hectáreas a sembrar en papa
X2= No. de hectáreas a sembrar en zanahoria

Objeto: Maximizar el Margen Bruto (MB): max f(X1,X2)= IT-CVT

Planteamiento:

IT= Precio x rendimiento x No. de hectáreas

IT= (80 x 16.000X1) + (70 x 20.000X2)

CVT= (600.000X1) + (500.000X2)

MB= IT-CVT

MB= 680.000X1 + 900.000X2

Función Objetivo:

Maximizar MB= 680.000X1 + 900.000X2

Sujeto a:

Restricción de m de o:	$110X1 + 100X2 \leq 1800$	(1)
Restricción de maquinaria:	$5X1 + 7X2 \leq 100$	(2)
Restricción de área:	$X1 + X2 \leq 20$	(3)
Limitaciones de no negatividad:	$X1 \geq 0$; $X2 \geq 0$	(4)

Las desigualdades (1) y (2) son restricciones técnicas determinadas por el estado de tecnología y la disponibilidad de insumos. La desigualdad (3) es una restricción determinada por la disponibilidad de recursos (tierra). La cuarta restricción es la condición de no negatividad, lo cual significa que algo hay que producir, ya sea uno de los dos cultivos o ambos.

Es conveniente presentar algunas consideraciones generales con base en el modelo de programación lineal planteado anteriormente:

1. Los rendimientos de los cultivos son aleatorios, con lo cual podemos estar subestimando o sobreestimando la función objetivo.

2. Los precios de los productos agrícolas son aleatorios.

3. No se hace explícita la restricción de capital.

4. No se considera el costo de oportunidad del capital.

5. El recurso agua es aleatorio.

6. Se considera que existe homogeneidad del suelo, con lo cual se espera que los rendimientos sean uniformes.

7. No se tienen antecedentes de la explotación de la finca, por ejemplo la existencia de potreros y la rotación de cultivos,principalmente.

8. No están explícitas las alternativas de colocación de los productos en el mercado.

En la medida en que el empresario o el planificador disponga de mayor información técnica o económica sobre el entorno de la empresa, permite la inclusión de otras restricciones, con lo cual el modelo se hace más próximo a la realidad y contribuye a una mejor toma de decisiones.

En este sentido, al disponerse de información sobre estudios de mercado, de estadísticas sobre la estacionalidad de los precios de los productos por regiones, entre otros aspectos, se lograría con ello una mejor estimación de los precios que se esperan obtener en la época de venta de los productos.

Si se dispone de infraestructura de riego y se conocen los requerimientos de agua para cada cultivo y el costo asociado con dicha práctica, dicha información se puede incluir como una nueva restricción al modelo,con lo cual se torna menos aleatorio los rendimientos físicos esperados.

5. SOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL

5.1 El Método Gráfico

En general cuando se busca determinar la asignación óptima de recursos escasos entre productos o actividades en competencia en la que únicamente intervienen dos actividades, el método gráfico resulta adecuado para encontrar la solucion al problema planteado.

5.1.1 Ejemplo 1

Tomemos como ejemplo el problema del empresario agricola que decide producir papa o zanahoria.

Función Objetivo: Maximizar $MB= 680.000X1 + 900.000X2$

Sujeto a:

Restricción de m de o:	$110X1 + 100X2 \leq 1800$	(1)
Restricción de maquinaria:	$5X1 + 7X2 \leq 100$	(2)
Restricción de área:	$X1 + X2 \leq 20$	(3)
Limitaciones de no negatividad:	$X1 \geq 0$; $X2 \geq 0$	(4)

Se procede de la siguiente manera: se tratan como ecuaciones las tres restricciones de desigualdad; se resuelven para X1 en función de X2 y se trazan las graficas correspondientes, así:

A Partir de (1)	para	X1= 0	X2=18 ;	Para X2=0	X1=16.36
A partir de (2)	para	X1= 0	X2=14.28	para X2=0	X1=20
A partir de (3)	para	X1= 0	x2=20 ;	para X2=0	X1=20

Los puntos obtenidos se grafican en un sistema de coordenadas tal como se presenta en la figura 1.

Las desigualdades originales de "menor igual que" incluye todos los puntos sobre la linea y a la izquierda de ella. Las limitaciones de no negatividad, X1,X2 >= 0 se representan mediante el eje vertical y horizontal respectivamente. La zona sombreada se denomina región factible y contiene todos los puntos que satisfacen las tres restricciones más las de no negatividad. X1 y X2 son las variables estructurales o de decisión.

Para encontrar la solución óptima dentro de la región factible,se traza una grafica de la función objetivo como una serie de lineas de isobeneficios. A partir de la ecuación $MB= 680.000X1 + 900.000X2$, se tiene que:

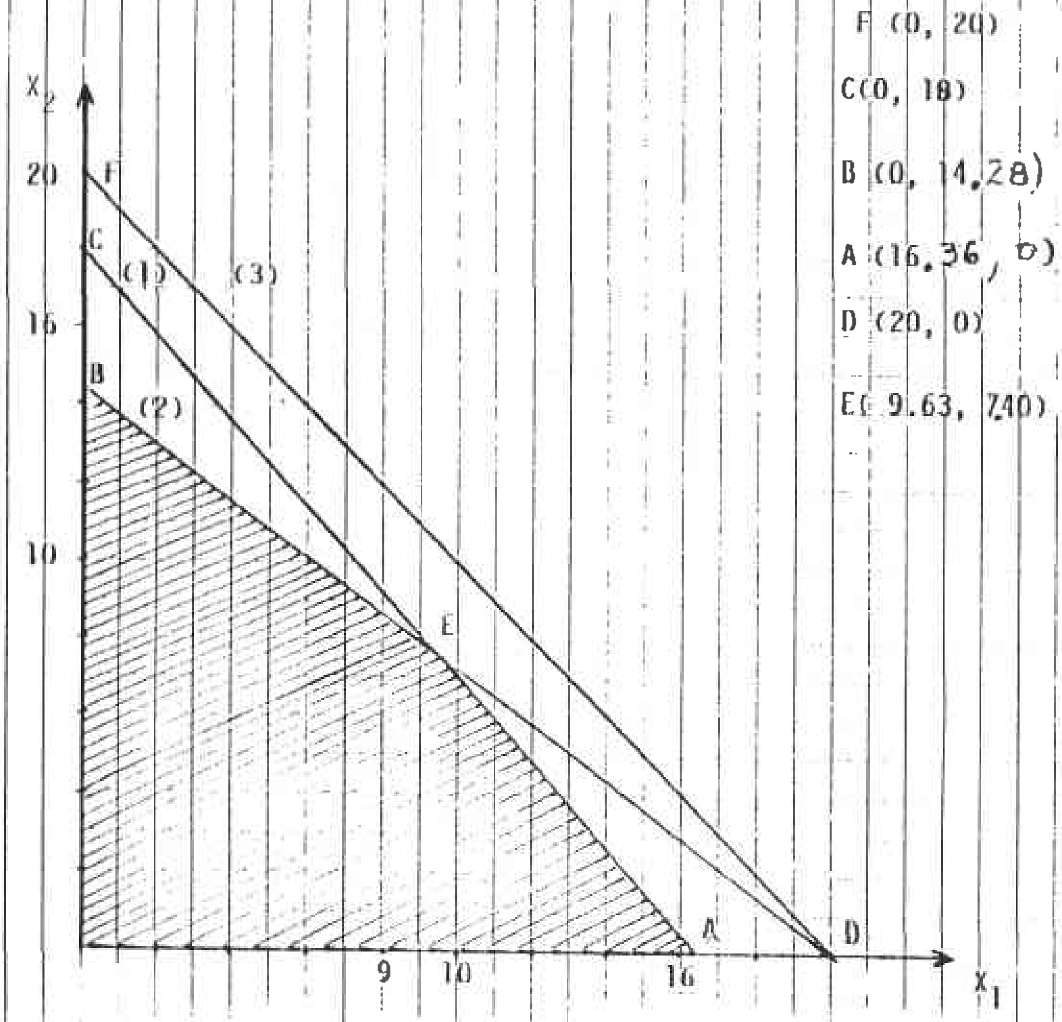

X2
20
16
10
F
C
B
(1)
(3)
(2)
E
A
D
9
10
16
X1
F (0, 20)
C(0, 18)
B (0, 14.28)
A (16.36, 0)
D (20, 0)
E(9.63, 7.40)

FIGURA 1.

$$X1 = \frac{MB}{680.000} - 1.32X2$$

Esta recta de isobeneficios tiene una pendiente de - 1.32. La línea de isobeneficio que presenta los mayores márgenes brutos posibles toca la región factible en E, punto en el cual X1= 9.63 hectáreas de papa y X2= 7.40 hectáreas de zanahoria.

El punto E de la figura 1 es óptimo por cuanto en él se obtiene el mayor beneficio bruto esperado ($ 13.208.400). En efecto, al calcular el ingreso bruto en cada uno de los puntos del gráfico 1 se obtiene lo siguiente:

Punto A (X1=16.36)	MB= 16.36* 680.000 =11.124.800
Punto B (X2=14.28)	MB= 14.28* 900.000 =12.852.000
Punto E (X1=9.63 y X2=7.40)	MB= 9.63* 680.000 + 7.40*900.000
	MB= 13.208.400

Los puntos C,D,F son soluciones no factibles, por cuanto no satisfacen las restricciones impuestas en el problema. Observese que las restricciones (1) y (2) que corresponden a mano de obra y maquinaria respectivamente, son restrictivas en el óptimo, de no ser así, la producción aumentaría hasta el punto en el cual la tierra se torne restrictiva.

A las restricciones (1) y (2) se les denomina **"activas"**, ya que son las que determinan la solución optima (punto E), en tanto que la restriccion (3) es **"no activa"**, pues no presenta una limitación propiamente dicha, presentando un exceso de 7.03 has. que quedarian ociosas para el productor, dado que se hallan utilizadas al máximo la mano de obra y la maquinaria disponible.

Alternativamente, al resolver simultáneamente el sistema de ecuaciones activas (1) y (2) se obtiene el punto (E):

$$110x1 + 100x2 = 1800 \quad (1)$$

$$5x1 + 7x2 = 100 \quad (2)$$

Este sistema se satisface con los valores X1= 9.63 y x2= 7.40 que corresponde al punto E del gráfico 1, con lo cual f(x1,x2) = 680.000* 9.63 + 900.000* 7.40 = 13.208.400

5.1.2 Ejemplo 2

Una empresa que produce para el mercado dos productos diferentes requiere para su proceso de fabricación tres tipos de maquinaria.

Las preguntas relevantes para el fabricante son las siguientes: Cual será la cantidad óptima de producto 1 y de producto 2 que la empresa puede producir para obtener el mayor ingreso neto posible ? Cual es el precio de referencia por hora de maquinaria vendida o arrendada ?

En el cuadro siguiente se relacionan los coeficientes técnicos y la disponibilidad de maquinaria en horas/semana.

	Tipo de maquinaria	Producto 1 x1	Producto 2 x2	Disponibilidad (horas/semana) bi
	1	2	1	70
	2	1	1	40
	3	1	3	90
Precio Unitario de venta		70	120	
Costo Unitario		30	60	

Función Objetivo: Maximizar $40x_1 + 60x_2$

sujeto a:

$$2x_1 + x_2 \leq 70 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 40 \quad (2)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 90 \quad (3)$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Tomando como ecuaciones las tres restricciones se resuelve x1 en funcion de x2 y se grafican los puntos correspondientes tal como se presenta en la figura 2.

A partir de (1) : $x1=0$ $x2=70$; $x2=0$ $X1=35$

A partir de (2): $x1=0$ $x2=40$; $x2=0$ $x1=40$

A partir de (3): $x1=0$ $x2=30$; $x2=0$ $x1=90$

Obsérvese que la restricción (1) que corresponde al tipo de maquinaria 1 es "inactiva". En consecuencia, el punto óptimo se pude determinar mediante la solución simultánea de las ecuaciones activas (2) y (3):

$$x1 + x2 = 40 \quad (2)$$

$$x1 + 3x2 = 90 \quad (3)$$

La solución para este sistema de ecuaciones simultáneas es: $X1=15$ y $x2=25$, que determinan el punto E de la gráfica 2.

En consecuencia, el mayor ingreso neto esperado por el fabricante lo obtiene produciendo 15 unidades de producto 1 y 25 unidades de producto 2, que en conjunto le genera un ingreso neto de 2100.

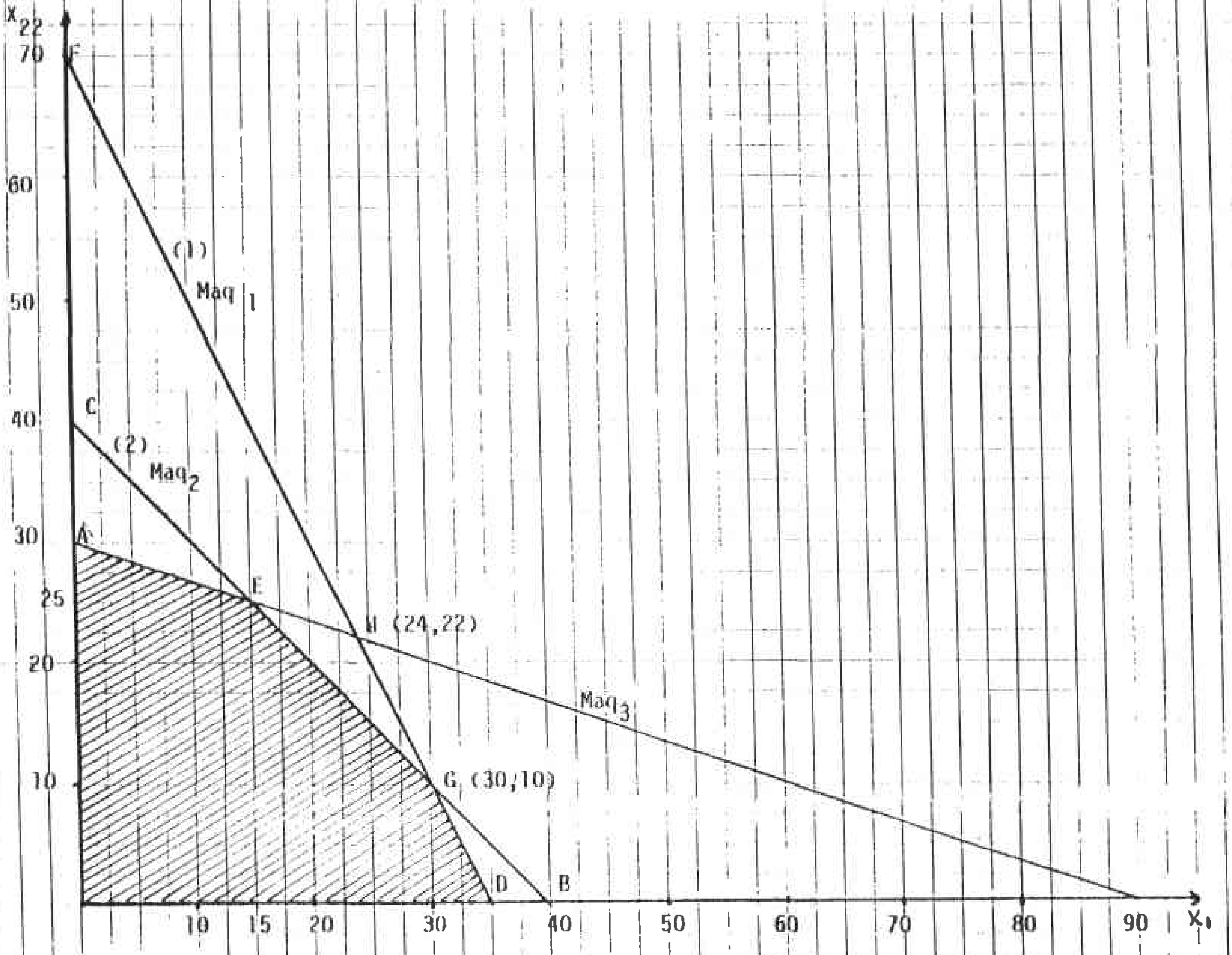
$$f(x1,x2) = 40*15 + 60*25 = 2100$$

5.1.3 Precios sombra

Desde el punto de vista económico, es relevante tanto para el productor como para el investigador, poder establecer el costo de oportunidad que tienen los recursos en su mejor uso alternativo. En otras palabras, se requiere establecer en cuanto aumenta la función objetivo cuando se incrementa una unidad adicional de factor (tierra, capital, mano de obra, maquinaria) sin que se modifique la función objetivo.

Para calcular los precios sombra, denotados como λ, que no son más que multiplicadores de Lagrange, se sigue un procedimiento matemático que consiste en conformar un sistema de ecuaciones conocidas como las condiciones Kuhn-Tucker (K-T).

Como ilustracion, consideremos el conjunto de restricciones del ejemplo 2.



X22
70
F
60
(1)
Maq 1
50
C
40
(2)
Maq2
30
A
E
25
H (24,22)
20
Maq3
10
G (30,10)
D
B
10
15
20
30
40
50
60
70
80
90
X1

FIGURA 2.

$$\text{Max } 40x1 + 60x2$$

sujeto a :

$$\begin{aligned} 2x1 + x2 &\le 70 \quad (1)\\ x1 + x2 &\le 40 \quad (2)\\ x1 + 3x2 &\le 90 \quad (3) \end{aligned}$$

Utilizando el procedimiento de K-T tenemos:

$$Z = 40x1 + 60x2 + \lambda_1(70-2x1-x2) + \lambda_2(40-x1-x2) + \lambda_3(90-x1-3x2)$$

Hallando las derivadas parciales, tenemos:

$$\frac{\partial Z}{\partial x1} = 40 - 2\lambda 1 - \lambda 2 - \lambda 3 \le 0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x1} \cdot x1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x2} = 60 - \lambda 1 - \lambda 2 - 3\lambda 3 \le 0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial x2} \cdot x2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda 1} = 70 - 2x1 - x2 \ge 0 \qquad \frac{\partial Z}{\partial \lambda 1} \cdot \lambda 1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda 2} = 40 - x1 - x2 \ge 0 \qquad \frac{dZ}{d\lambda 2} \cdot \lambda 2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda 3} = 90 - x1 - 3x2 \ge 0 \qquad \frac{dZ}{d\lambda 3} \cdot \lambda 3 = 0 \quad (5)$$

A partir de las inecuaciones (1) y (2) las cuales están asociadas a la función objetivo, se igualan a cero y se resuelve el sistema simultáneamente:

$$40 - 2\lambda 1 - \lambda 2 - \lambda 3 = 0 \quad (1)$$

$$60 - \lambda 1 - \lambda 2 - 3\lambda 3 = 0 \quad (2)$$

Haciendo $\lambda 1$ igual a cero, por cuanto está asociada a la restricción no activa, vista en el gráfico 2, se tiene:

$$40 - \lambda 2 - \lambda 3 = 0$$

$$60 - \lambda 2 - 3\lambda 3 = 0$$

Este sistema tiene como solución: $\lambda 2 = 30$ y $\lambda 3 = 10$

Los valores de $\lambda 2$ y $\lambda 3$ tienen el siguiente significado económico: si somos arrendatarios de la maquinaria, estaríamos dispuestos a pagar hasta 30 unidades monetarias por una unidad adicional de maquinaria 2.

Si fuéramos los dueños de la maquinaria, estaríamos dispuestos a ceder una hora de maquinaria 2, si nos ofrecen como mínimo 30 unidades monetarias o más.

Por maquinaria 3 estamos dispuestos a tomar en arriendo a un precio de 10 unidades monetarias. Si precisamos arrendar, esperaríamos recibir como mínimo 10 unidades monetarias o mas.

Por cuanto estaríamos dispuestos en comprar o en dar en arriendo maquinaria 1 ? Obviamente se pediría cualquier valor por cuanto $\lambda 1 = 0$ (este recurso se encuentra en exceso y no molesta para nada nuestra toma de decisiones).

Que le sucede a la función objetivo f(x1,x2) si se aumenta la restricción (2) en una unidad, es decir, pasa de b2= 40 a b2=41 unidades ? (ceteris paribus)

$$x1 + x2 = 41$$

$$x1 + 3x2 = 90$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$41 - x2 + 3x2 = 90$$

$2x2 = 49$ de donde, $x2 = 24.5$; $x1 = 16.5$

con lo cual, $f(x1,x2) = 40 * 16.5 + 60 * 24.5 = 2130$

La función objetivo f(x1,x2) = 2130 aumentó en 30 unidades monetarias, que representa el valor estimado de $\lambda 2$.

Que le ocurre a la función objetivo si b2= 42 ?

$x1 + x2 = 42$

$x1 + 3x2 = 90$

Resolviendo el sistema tenemos:

$42 - x2 + 3x2 = 90$

$2x2 = 48$ de donde, $x2 = 24$; $x1 = 18$

con lo cual, $f(x1,x2) = 40 * 18 + 60 * 24 = 2160$, que representa un incremento de 30 unidades adicionales, respecto a la situación antrior.

Resumiendo tenemos:

Si b2= 40	Si b2= 41	Si b2= 42
x1= 15	x1= 16.50	x1= 18
x2= 25	x2= 24.50	x2= 24
1= 0	1= 0	1= 0
2= 30	2= 30	2= 30
3= 10	3= 10	3= 10
f= 2100	f= 2130	f= 2160

Como puede observarse, por cada unidad adicional de maquinaria 2 que se utilice en el proceso productivo, trae como efecto un incremento en la funcion objetivo de 1.5 unidades adicionales del producto x1, asociado a una disminución de 0.5 unidades de producto x2. lo cual implica:

ganar $60 = 40 * 1.5$ por concepto de x1

perder $30 = 60 * 0.5$ por concepto de x2

Δ Neto = 30, que representa el valor de $\lambda 2$.

5.1.4 Análisis de sensibilidad

Un método sistemático para identificar los efectos de las variaciones que se pueden ejercer sobre la solución óptima, ya sea en la entrada o en la salida de coeficientes, términos constantes o en los coeficientes de la función objetivo, lo constituye el análisis de sensibilidad. Dicho análisis pretende establecer que si un determinado elemento puede ser variado en una amplia gama de valores sin afectar la decisión, la decisión en cuestión -se dice- que no es sensible a las incertidumbres relativas a ese determinado elemento. Por el contrario, si un pequeño cambio en el cálculo de un elemento ha de alterar la decisión en forma significativa, se expresa que ésta es muy sensible a los cambios de ese elemento. Con dicho análisis se pretende dar una mayor flexibilidad a la solución del modelo y a la vez contar con criterios más sólidos para la toma de decisiones.

En el ejemplo, queremos establecer dentro de que rango de valores, $\lambda 2$ continúa siendo igual a 30, sin afectar la solución.

A partir del gráfico 2 se puede observar que un traslado de la curva de Maq 2 hacia la derecha, alcanza su máximo desplazamiento hasta el punto donde se igualan las curvas de Maq 1 y Maq 3 (punto H), con lo cual se tiene:

$$2x1 + x2 = 70 \quad (1)$$

$$x1 + 3x2 = 90 \quad (3)$$

Los valores que satisfacen al sistema son: X1 = 24 ; x2 = 22 , lo que determina que b2 = x1 + x2 = 46 y las tres ecuaciones se cumplen simultáneamente.

De otra parte, un desplazamiento de la curva de Maq 2 hacia la izquierda tiene como límite el valor de 30 (punto A intercepción con el eje las y). En consecuencia, el rango de sensibilidad de b2 está dado por 30 <= b2 <=46. Dentro de este rango, 2 seguirá siendo igual a 30.

El rango de sensibilidad para b1 está dado por el desplazamiento de la curva de Maq 1. Hacia la izquierda, Maq 1 puede llegar hasta la intercepción de Maq 2 y Maq 3 (punto óptimo), donde X1=15 y X2=25, con lo cual b1 = 2x1 + x2 = 2(15) + 25 = 55. Un desplazamiento de la curva Maq 1 hacia la derecha no tiene ninguna limitante, esto es, b1 tiende a infinito. Por consiguiente, el rango de b1 está dado por $55 \leq b1 \leq \infty$

El rango de sensibilidad para b3 está determinado por el traslado de Maq3 hacia abajo, hasta el punto de intercepción de Maq 2 y Maq 1 (punto G) donde $x1= 30$ y $x2= 10$, dando como resultado $b3= x1 + 3x2 = 30 + 3(10) = 60$. Al desplazar b3 hacia arriba se llega hasta el punto C donde $x2 = 40$ sobre el eje de las y. En consecuencia, el rango de sensibilidad de b3 está dado por
$120 \leq b3 \leq 60$, rango dentro del cual $\lambda 3$ seguirá manteniendo un valor de 10.

Que le ocurre a la solución óptima (valor de las x) si se varía el valor de los ci (valor de los márgenes netos) ? Obviamente que no ocurre nada. Si está lloviendo y de todas maneras tengo que ir donde el médico, el hecho de que tenga o nó paraguas la decisión de ir no cambia. En todos los casos es más ventajoso contar con mayores márgenes y por consiguiente, se preferirá más a 40x1 que a 20x1, en la función objetivo.

5.2 Algoritmo Simplex

Un algoritmo es un conjunto de reglas o un procedimiento sistemático para obtener la solución de un problema. El algoritmo simplex es un metodo (o un procedimiento de computación) para determinar soluciones básicas factibles para un sistema de ecuaciones y verificar las soluciones para asegurarse de que sean óptimas. El algoritmo pasa de una solución básica factible a otra, mejorando siempre la solución previa, hasta llegar a la óptima. Esas variables se hacen iguales a cero en una etapa dada que se denomina no en la base o no en la solución. Las que no se hacen iguales a cero se denominan en la base o variables básicas.

5.2.1 Algoritmo simplex: Maximización

En el siguiente ejemplo de maximización se muestra el procedimiento del método simplex:

Maximizar $10x1 + 6x2$

Sujeto a : $12x1 + 4x2 \leq 72$

$10x1 + 10x2 \leq 80$

$4x1 + 8x2 \leq 56$ $\qquad x1,x2 \geq 0$

Primer paso: La tabla simplex inicial

i) Las desigualdades se convierten en ecuaciones, mediante la adición de variables de holgura (x3, x4, x5):

$$12x1 + 4x2 + x3 = 72$$

$$10x1 + 10x2 + x4 = 80$$

$$4x1 + 8x2 + x5 = 56$$

ii) Se expresan las ecuaciones de restricciones en forma matricial:

$$\begin{matrix} 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 72 \\ 80 \\ 56 \end{matrix}$$

iii) Se prepara una tabla simplex inicial compuesta por la matriz de coeficientes de las ecuaciones de restricciones y el vector de columna de los bi. En la última fila se llevan los coeficientes de la función objetivo

Tabla inicial simplex:

	x1	x2	x3	x4	x5	bi
	12	4	1	0	0	72
	10	10	0	1	0	80
	4	8	0	0	1	56
-M	10	6	0	0	0	0

La primera solución básica se puede leer de la tabla simplex inicial. Al ajustar X1= 0 y x2= 0 da como resultado x3=72; x4= 80; x5= 56, con lo cual la función objetivo tiene un valor de cero y constituye la primera solucion basica factible:

$$FO= 0(x1) + 0(x2) = 0$$

Segundo paso: El elemento pivote y un cambio de base

Para incrementar el valor de la función objetivo (FO), se examina una nueva solución básica factible, para lo cual se debe introducir una nueva variable a la base y se debe excluir una de las variables que se encontraban anteriormente en la base. Este proceso de selección se denomina cambio de base.

i) A partir de la última fila que contiene los coeficientes de la FO, se determina el mayor valor absoluto el cual deberá entrar en la base. Este valor corresponde a 10, sobre la columna x1. A la columna x1 se le denomina columna pivote y se señala con una flecha.

ii) Se divide la columna bi por cada uno de los valores de x1: (72/12); (80/10); (56/4). Puesto que 72/12 es la razón más pequeña de las tres, la hilera 1 es la del pivote. El elemento pivote es (6) que entra a la base y reemplaza al vector unitario con 1, bajo la columna s1, que sale de la base.

Tercer paso: Pivoteado

Pivoteado es el proceso de resolver las m ecuaciones en función de las n variables que se encuentran en la base.

i) Se multiplica la hilera pivote por el reciproco del elemento pivote. En este caso se multiplica la fila 1 por 1/12.

	x1	x2	x3	x4	x5	bi
	1	1/3	1/12	0	0	6
	10	10	0	1	0	80
	4	8	0	0	1	56
-M	10	6	0	0	0	0
	↑					

ii) Después de reducir el elemento pivote a 1 se busca hacer ceros la columna pivote, para lo cual en este caso, se resta 10 veces la hilera 1 de la hilera 2: 4 veces la hilera 1 de la hilera 3 y 10 veces la hilera 1 a la fila 4, con lo cual se obtiene la segunda tabla simplex.

Tabla dos simplex:

	x1	x2	x3	x4	x5	bi
	1	1/3	1/12	0	0	6
	0	20/3	-5/6	1	0	20
	0	20/3	-1/3	0	1	32
-M	0	8/3	-5/6	0	0	60
		↑				

La segunda solución básica factible se puede leer directamente de la segunda tabla. Al hacer x2= 0 y x3= 0 resulta una matriz de identidad con x1= 6; x4 =20; y x5= 32. En consecuencia, la FO= 10(6) + 6(0) = 60.

Cuarto paso: Optimización

La función objetivo se maximiza cuando no haya indicadores positivos en la última fila. El cambio de la base y el pivote continúan según el proceso indicado anteriormente. Como 8/3. en la columna x2, es el valor más positivo, se introduce a la base: la columna x2 se convierte en la columna pivote.

Al dividir la columna de los bi por cada uno de los elementos de la columna pivote (x2): 6/1/3= 18; 20/20/3= 3; 32/20/3= 4.8, con lo cual la razón más pequeña se encuentra en la segunda fila, y 20/3 se convierte en el nuevo elemento pivote.

i) Multiplicamos la fila 2 por 20/3

	x1	x2	x3	x4	x5	bi
	1	1/3	1/12	0	0	6
	0	1	-1/8	3/20	0	3
	0	20/3	-1/3	0	1	32
-M	0	8/3	-5/6	0	0	78

ii) Al restar 1/3 veces la fila 2 de la fila 1, 20/3 veces la fila 2 de la fila 3 y se suman 8/3 de la fila 2 a la fila 4 se obtiene la tercera tabla simplex.

Tercera tabla simplex:

	x1	x2	x3	x4	x5	bi
	1	0	1/8	-1/20	0	6
	0	1	-1/8	3/20	0	3
	0	0	1/2	-1	1	12
-M	0	0	-1/2	-2/5	0	78

Puesto que ya no aparecen indicadores positivos en la última fila, se trata entonces de la solución óptima.En la columna de los bi encontramos que x1= 6; x2= 3; x3= 0; x4= 0; x5= 12.
FO= 10(6) + 6(3) = 78

En la última fila aparecen los valores marginales o precio sombra. así, los beneficios aumentarán en 50 céntimos por el cambio de una unidad en el valor constante de la restricción 1; en 40 céntimos para un incremento de una unidad del valor constante de la restricción 2, y en cero unidades monetarias para un aumento de una unidad del valor constante de la restricción 3.

Síntesis del algoritmo

1. Expresar las restricciones en forma estándar

A partir del ejemplo 2 tenemos las siguientes expresiones:

FORMA CANONICA

Maximizar 40x1 + 60x2

Sujeto a: $2x1 + x2 \leq 70$

$x1 + x2 \leq 40$

$x1 + 3x2 \leq 90$

$x1, x2 \geq 0$

FORMA ESTANDAR

Maximizar 40x1 + 60x2

Sujeto a: 2x1 + x2 + x3 =70

x1 + x2 + x4 =40

x1 +3x2 + x5 =90

$xi \geq 0$

2. Expresar las restricciones en forma matricial

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{bmatrix}
$$

3. Preparar la tabla inicial.

Tabla 1 del simplex:

x1	x2	x3	x4	x5	bi
2	1	1	0	0	70
1	1	0	1	0	40
1	(3)	0	0	1	90
40	60	0	0	0	0

3.Pivoteo

La columna pivote corresponde a x2 donde se encuentra el mayor valor absoluto (60). La columna bi se divide por cada uno de los valores de x2 y se escoge la razón más pequeña (30). Se convierte el elemento pivote a 1, mediante la multiplicación de la fila 3 por 1/3 y, luego, restando la fila 3 de la fila 1 y la fila 3 de la fila 2 y por último restando 60 veces la fila 3 de la fila 4.

Tabla 2 del simplex

x1	x2	x3	x4	x5	bi
5/3	0	1	0	-1/3	40
2/3	0	0	1	-1/3	10
1/3	1	0	0	-1/3	30
20	0	0	0	-20	1800

4. Se cambia otra vez la base y el pivote. La columna x1 es la columna pivote, pues contiene el mayor valor positivo. Se divide la columna bi por cada uno de los elementos de la columna pivote (x1), con lo cual 2/3 es el elemento pivote. Ahora se multiplica la fila 3 por el recíproco del elemento pivote, que es 3. A continuación se restan 2/3 la hilera 3 de la hilera 2, 5/3 la hilera 3 de la hilera 3 y 20 veces la hilera 3 de la hilera 4.

Tabla 3 del simplex

x1	x2	x3	x4	x5	bi
0	0	1	-5/2	1/2	15
1	0	0	3/2	-1/2	15
0	1	0	-1/2	1/2	25
0	0	0	-30	-10	2100

La solución óptima la encontramos sobre la fila bi:
X1= 15; x2= 25; x3= 15

FO= 40(15)+ 60(25)= 2100

Sobre la última fila, y a la altura de las variables de holgura (x3, x4, x5) encontramos los valores de los precio sombra de los factores $\lambda 1 = 0$; $\lambda 2 = 30$; $\lambda 3 = 10$ que son los mismos valores calculados a través de Kuhn-Tucker y discutidos en la sección 5.1.3

5.2.2 Algoritmo Simplex: minimización

En el siguiente ejemplo se utiliza el algoritmo del simplex para minimizar los costos.

Minimizar $Z = 5x1 + 3x2 + x3$

Sujeto a:

$$2x1 + 3x2 + 4x3 \geq 14$$

$$6x1 + 7x2 + 8x3 \geq 20$$

$$7x1 + x2 + 3x3 \geq 30$$

$$x1 + 2x2 + 6x3 \geq 50$$

$$x1,\ x2,\ x3 \geq 0$$

1. Procedimiento

i) Se convierten las desigualdades en ecuaciones, restando las variables de excedentes:

$$2x1 + 3x2 + 4x3 - s1 = 14$$

$$6x1 + 7x2 + 8x3 - s2 = 20$$

$$7x1 + x2 + 3x3 - s3 = 30$$

$$x1 + 2x2 + 6x3 - s4 = 50$$

ii) Se expresan las ecuaciones de restricciones en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ s1 \\ s2 \\ s3 \\ s4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

iii) Tabla simplex inicial

x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	bi
2	3	4	-1	0	0	0	14
6	7	8	0	-1	0	0	20
7	1	3	0	0	-1	0	30
1	2	6	0	0	0	-1	50
5	3	1	0	0	0	0	

A partir de la tabla inicial y al ajustar x1= 0, x2= 0 y x3= 0, encontramos que la solución básica no es factible, puesto que s1 = -14, s2= -20, s3= -30 y s4= -50, lo cual es un contrasentido. Para obviar la situación anterior, se deben agregar variables artificiales o ficticias, las cuales no tienen ningún significado económico, con la finalidad de generar una solución básica factible inicial, tal como se muestra en la matriz siguiente:

x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	bi
2	3	4	-1	0	0	0	1	0	0	0	14
6	7	8	0	-1	0	0	0	1	0	0	20
7	1	3	0	0	-1	0	0	0	1	0	30
1	2	6	0	0	0	-1	0	0	0	1	50
5	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Como resultado de lo anterior, la matriz de trabajo se ha hecho más extensa y por consiguiente más engorrosa la búsqueda de la solución.

Un método alternativo para resolver los problemas de minimización es recurrir al dual, por ser un camino más expedito.

5.2.3 Dualidad

A cada problema lineal en las variables x1, x2,.....,xn corresponde,asociado, otro programa lineal en las variables w1, w2.....,wn (donde m es el número de restricciones en el programa original), conocido como su dual. En otras palabras, cada problema de maximización en la programación lineal tiene un problema correspondiente de minimización y viceversa. El problema original se denomina primario; el correspondiente es su dual.

Desde el punto de vista práctico es mas sencillo resolver los problemas de **minimización** mediante el empleo del dual, ya que si se utiliza el algoritmo del simplex, los valores negativos generados por las variables de excedentes, requieren la adicion de variables artificiales, con lo cual la mecanica para la solución se hace mas extensa, tal como se planteó en el numeral 5.2.2.

Ejemplo:

Minimizar $C = 10x1 + 40x2 + 20x3$

Sujeto a: $2x1 + 3x2 + 5x3 \geq 14$

$6x1 + 7x2 + 4x3 \geq 20$ con $x1, x2, x3 \geq 0$

Su dual correspondiente es :

Maximizar $Z= 14w1 + 20w2$

Sujeto a : $2w1 + 6w2 \leq 10$

$3w1 + 7w2 \leq 40$

$5w1 + 4w2 \leq 20$

con $w1, w2 \geq 0$

Obsérvese que el procedimiento consiste básicamente en transponer la matriz original, donde los bi en la matriz de minimización, pasan a constituir los coeficientes de la función objetivo de maximización; los coeficientes de la función objetivo de minimización pasan a ser los bi en la matriz de maximización.

El problema primario contiene 3 variables y 2 restricciones, en tanto que su dual, contiene 2 variables y 3 restricciones, resultando de esta manera más corto el procedimiento operativo de maximización, tanto por el método gráfico como por el algoritmo del simplex.

Ejemplo:

Un fabricante de concentrados para animales está interesado en determinar una mezcla de mínimo costo, para lo cual dispone de dos insumos: y1= maíz e y2= harina de pescado. El maíz (y1) proporciona a la mezcla una kilocaloría y una unidad de proteína; la harina de pescado proporciona 2 kilocalorías y 3 unidades de proteína. La mezcla debe contener como mínimo 2 kilocalorías y 3 unidades de proteína. Los precios del maíz y de la harina de pescado son de 4 y 6 unidades monetarias, respectivamante.

Planteamiento del problema:

Minimizar $C = 4y1 + 6y2$

Sujeto a : $y1 + 2y2 \geq 2$ necesidades de calorías

$y1 + 3y2 \geq 3$ necesidades de proteína

$y1,\ y2 \geq 0$

Las preguntas relevantes para el fabricante de concentrados son las siguientes:

1.- Cual es la cantidad óptima tanto de maíz (y1) como de harina de pescado (y2) que debe contener la fórmula ?

2.- Cual es el precio de referencia que deberá cobrar el fabricante por las calorías y las proteínas contenidas en la fórmula ?

Utilizando el procedimiento de K-T, se tiene lo siguiente:

$C = -4y1 - 6y2 + L1(-2+y1+2y2) + L2(-3 + y1+3y2)$

donde L es un multiplicador de Lagrange. Hallando las derivadas parciales se tiene:

$$\frac{dZ}{dy1} = -4 + L1 + L2 \leq 0 \qquad \frac{dZ}{dy1} . y1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dZ}{dy2} = -6 + 2L1 + 3L2 \leq 0 \qquad \frac{dZ}{dy2} . y2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{dZ}{dL1} = -2 + y1 + 2y2 \geq 0 \qquad \frac{dZ}{dL1} . L1 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{dZ}{dL2} = -3 + y1 + 3y2 \geq 0 \qquad \frac{dZ}{dL2} . L2 = 0 \qquad (4)$$

Para dar respuesta a la primera pregunta, despejamos los valores de y1 e y2, a partir de las ecuaciones (3) y (4):

De (3) tenemos que: $y1 + 2y2 = 2$

De (4) tenemos que: $y1 + 3y2 = 3$

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos que y1= 0; y2=1 Estos valores satisfacen el sistema, generando una solución de punto extremo (ver gráfica 3), indicando con ello que el fabricante solamente utilizando harina de pescado (y2), puede satisfacer los requerimientos de la dieta. Una forma de comprobar esta solución es reemplazando los valores óptimos en las restricciones :

Restricción de calorías: $y1 + 2y2 = 2$

$(0) + 2(1) = 2$

Restricción de proteínas: $y1 + 3y2 = 3$

$(0) + 3(1) = 3$

La Función Objetivo tendrá un valor de: $C = 4(0) + 6(1) = 6$

Para establecer el precio de referencia que deberá cobrar el fabricante por las calorías y la proteína contenida en la mezcla, basta con resolver las ecuaciones expresadas en (1) y (2):

De (1) se tiene: $L1 + L2 = 4$

de (2) se tiene: $2L1 + 3L2 = 6$

Este sistema de ecuaciones se satisface con: $L1=0$; $L2= 2$
Estos valores representan los precios sombra o precios de referencia de los nutrientes. El fabricante estaría en condiciones de no cobrarle al consumidor las unidades de calorías contenidas en la fórmula ($L1=0$), en tanto que por cada unidad de proteína contenida en la mezcla, el fabricante deberá cobrar como mínimo 2 unidades monetarias ($L2=2$).

Como puede observarse, el procedimiento de K-T, es supremamente eficiente, ya que se obtiene simultáneamente los valores óptimos de las variables y los precios sombra de los recursos.

En el problema anterior, el fabricante a través del método gráfico, hubiera determinado los valores óptimos sin ninguna dificultad, pero desconocería los precios sombra de los recursos. Estos precios los puede determinar el fabricante utilizando el problema DUAL.

Desde el punto de vista del fabricante de concentrados, su problema consiste en cobrarle al consumidor, lo más caro posible. por las calorías y las proteínas que contiene la mezcla.

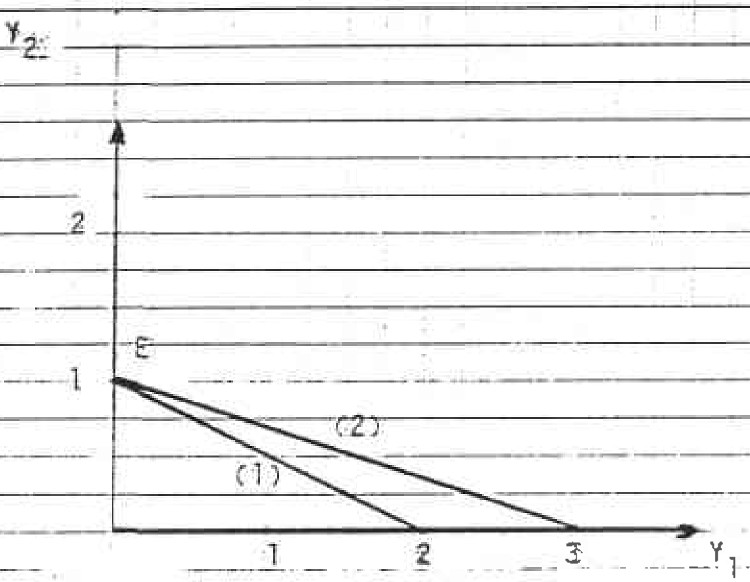


FIGURA 3.

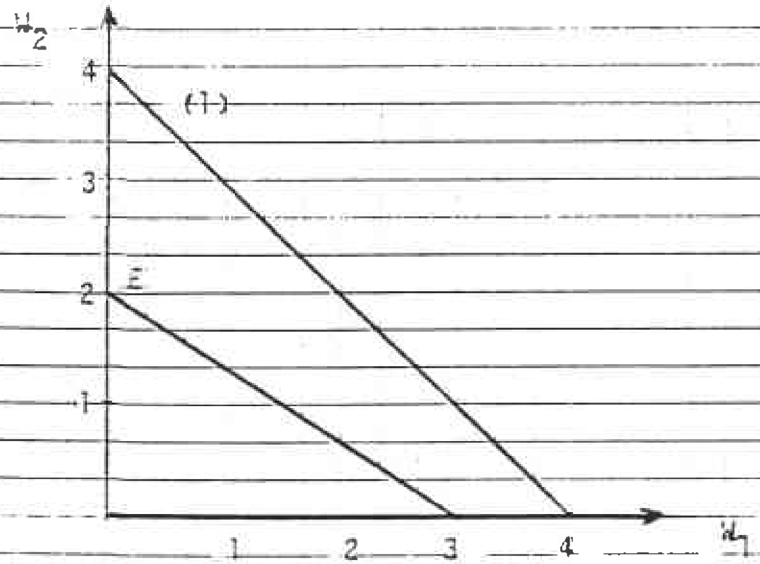


FIGURA 4.

El aspecto relevante para el fabricante de concentrados es poder determinar el precio de referencia que deberá cobrar por unidad de caloría y proteina contenido en la mezcla, para lo cual define las siguientes variables:

$w1$ = precio a cobrar/ unidad de caloría

$w2$ = precio a cobra / unidad de proteína

El problema para el fabricante se convierte ahora en :

Maximizar $2w1 + 3w2$

Sujeto a: $w1 + w2 \leq 4$ (una unidad de caloría + una unidad de proteina deben valer como mínimo 4 unidades monetarias)

$2w1 + 3w2 \leq 6$ (dos unidades de calorías + 3 unidades de proteina deben valer como minimo 6 unidades monetarias)

$w1, w2 \geq 0$ (no negatividad de los precios)

Este sistema puede resolverse gráficamente obteniéndose una solución de punto extremo, con $w1= 0$ y $w2= 2$, donde $w1$ es el precio por unidad de caloría y $w2$ es el precio por unidad de proteína (ver gráfico 4). Obsérvese que estos valores fueron obtenidos previamente. mediante el procedimiento de K-t en el problema primal (minimización) donde se determinaron los precios sombra.

Uno de los teoremas fundamentales del DUAL es que el valor óptimo de la función objetivo del primario es siempre igual al valor óptimo de la función objetivo dual, (a condición de que exista una solución óptima factible).

Del ejemplo anterior se tiene:

Primal: F.O = 4(0) + 6(1) = 6

Dual : F.O = 2(0) + 3(2) = 6

6. LA PROGRAMACION LINEAL POR COMPUTADOR

Existen en el mercado procedimientos computarizados para resolver problemas de programación lineal tales como el MPS (Mathematical Programmin System/360) de la IBM, el cual se opera mediante instrucciones SAS. Otro de los procedimientos computarizados específico para la optimización de problemas lineales es el paquete LINDO (Linear Interactive Discrete Optimizer), el cual lo utillizaremos en el presente capitulo (ver anexo 1).

El paquete LINDO permite trabajar cómodamente hasta con un máximo de 119 columnas(variables) y 59 filas (restricciones), mediante el empleo de microcomputadores (personal compiuter).

6.1 Información al usuario

El programa **LINDO** se puede gravar directamente en el disco duro del microcomputador disponible, o en su defecto, lo mantendremos en nuestro diskette de trabajo. Esta segunda alternativa es más práctica.

6.1.1 Entrada al programa LINDO

Estando el microcomputador en C:\ introducimos el diskette de trabajo en el drive A ó B, según el caso, e invocamos al programa LINDO:

```
C:\ A          (enter)
A:\ LINDO      (enter)

:
Max  2x + 3y   (enter)
st             (enter)
4x + 5y <= 9   (enter)
7x + 6y <= 13  (enter)
END            (enter)
GO             (enter)
```

Aqui resulta opcional definir las condiciones de no negatividad.

```
C:\A
A:\LINDO
:
Min 10w1 + 20w2
st
4w1 + 6w2 >= 100
2w1 + 3w2 >= 200
 w1 + 2w2 >=
END
GO
```

Alternativamente, se puede definir:

```
Min 10w1 + 20w2
st
-4w1 - 6w2 <= 100
-2w1 - 3w2 <= 200
- w1 - 2w2 <= 300
END
GO
```

Una vez que se ha dado el comando GO, el sistema pregunta al usuario si desea el análisis de sensibilidad. En caso positivo, lo cual siempre es conveniente, se confirma con YES. Mediante el comando TABLE, el sistema muestra al usuario una tabla o matriz tanto de las variables básicas como de las variables de holgura. Finalmente, el programa termina con el comando QUIT.

NOTA:

Como en todo problema de investigación, el aspecto más relevante para el investigador, es la interpretación de los resultados.Por consiguiente, para que el usuario del programa LINDO obtenga el mayor provecho del mismo, es conveniente que la Regional de la Corporación que esté interesada en capacitar a sus técnicos en ésta área de investigación, programe un curso-taller no menor de tres días, para lo cual se deberá contar con un computador con buena capacidad de memoria.

BIBLIOGRAFIA

BAUMOL, W.J. Teoría Económica y Análisis de Operaciones. Editorial Dossat. Bogotá 1984.

BRONSON,R. Investigación de Operaciones. Serie Schaum, editorial McGraw-Hill. México 1982.

DORFMAN, SAMUELSON, SOLOW. programación Lineal y Análisis Económico, Ediciones Aguilar, Madrid, 1964.

DOWLING, E.T. Matemáticas para Economistas. Serie Schaum, Editorial Mcgraw-Hill. México 1982.

FERGUSON, C.E. Teoría Microeconómica. Fondo de Cultura Económica. México 1978.

LAMBERT,H.L. Problemas de Economia de la Empresa. Ediciones Marqués del Duero. Madrid España 1979.

PHILIPPI,B. Teoría Económica y Análisis de Operaciones. Universidad Católica de Chile. Santiago Chile 1983.