

SELECCION DE UN DISEÑO DE TRATAMIENTOS MEDIANTE LOS CRITERIOS DE  
SESGO Y VARIANZA

13 JUL 1980

TESIS

Presentada al Programa de Estudios para Graduados Universidad Nacional-  
Instituto Colombiano Agropecuario

Por

FRANKLIN OMAR OSORIO GARCIA

Como requisito para optar al título de

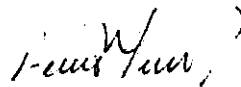
MAGISTER SCIENTIAE

Bogotá - Colombia

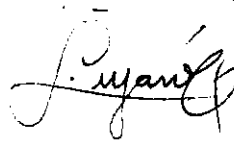
1977

COMITE CONSEJERO:

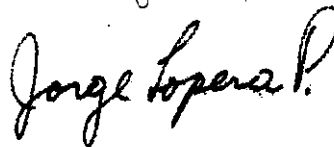
Dr. Julio Henao M.



Dr. Lauro Luján C.



Dr. Jorge Lopera P.



"El Presidente de Tesis y el Consejo Examinador de grado, no serán responsables de las ideas emitidas por el candidato".

(Artículo 217 de los Estatutos de la Universidad Nacional de Colombia).

A Gabriela y Alejandra

Dedico

## AGRADECIMIENTOS

Muy sinceros agradecimientos:

Al Dr. Julio Henao por la labor de dirección ejercida durante la realización de este trabajo, a los Ings. Arturo Franco y Jorge Franco cuya colaboración fue muy importante para la ejecución del mismo.

A la Universidad Nacional Autónoma de Honduras.

## CONTENIDO

		Página
1.	INTRODUCCION	1
2.	REVISION DE LITERATURA	4
2.1	Diseños de tratamientos utilizados en la estimación de superficies de respuesta	5
2.2	Selección de un diseño de tratamientos	10
2.3	Error de sesgo	12
2.4	Varianza	15
2.5	Sesgo y varianza combinados	15
2.6	Eficiencia relativa	16
2.7	Comparación de diseños de tratamientos	18
3.	MATERIALES Y METODOS	28
3.1	Metodología	28
4.	RESULTADOS Y DISCUSION	42
4.1	Varianzas de las matrices evaluadas	43
4.1.1.	Varianzas de los coeficientes de regresión para el modelo de ajuste	43
4.1.2	Eficiencia relativa	46
4.2	Error medio cuadrático	49
4.2.1	Varianza de los valores estimados	50
4.2.2	Sesgo	52

		Página
5.	CONCLUSIONES	55
6.	RECOMENDACIONES	57
7.	RESUMEN	59
	BIBLIOGRAFIA	62

## LISTA DE CUADROS

		Página
1.	Lista de las 8 matrices seleccionadas, codificadas en un intervalo -1 a +1.	38
2.	Lista de las 8 matrices seleccionadas, codificadas en un intervalo -1 a +1. (continuación).	39
3.	Lista de las 8 matrices seleccionadas, tratamientos sin codificar.	40
4.	Lista de las 8 matrices seleccionadas, tratamientos sin codificar.	41
5.	Análisis de varianza para regresión para el modelo de mejor ajuste.	42
6.	Elementos de la diagonal de la matriz precisión $(X'X)^{-1}$ para el modelo propuesto $Y(N, p) = \beta_0 + \beta_1 N + \beta_2 P + \beta_{11} N^{0.5} + \beta_{22} P^{0.5} + \beta_{12} NP$ .	45
7.	Eficiencia relativa de los diseños de tratamientos utilizando como comparador el diseño cuadrado doble modificado por Escobar.	46
8.	Eficiencia relativa del diseño compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, al utilizar como comparador el compuesto central de Box modificado por Berardo.	48
9.	Eficiencia relativa de los diseños Plan Puebla Dos modificados al utilizar como comparador el Plan Puebla Dos.	48
10.	Valores de los componentes V y B para los diseños de tratamientos investigados.	52
11.	Indices de sesgo para los diseños de tratamientos evaluados.	75

## LISTA DE FIGURAS

	Página
1. Compuesto central de Box modificado por Myers.	66
2. Compuesto central de Box modificado por Berardo.	67
3. Plan Puebla Dos.	68
4. Plan Puebla Tres.	69
5. Cuadrado doble modificado por Escobar.	70
6. Compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández.	71
7. Plan Puebla Dos modificado [1].	72
8. Plan Puebla Dos modificado [2].	73

## 1. INTRODUCCION

La función de producción o superficie de respuesta relaciona en forma empírica los factores de la producción (insumos) con la producción de cosechas, esta relación permite establecer cuáles son los factores productivos que explican la generación del producto, y cuál es el grado de asociación de un insumo con otros insumos, con el producto y su importancia en la obtención del mismo (19).

Ante el desconocimiento de la forma matemática de la función verdadera (ley natural), el investigador trata de aproximarse a dicha función, para lo cual hace uso de modelos estadísticos que pueden representarse como:

$$Y_i = f(\theta_i, X_i) + \epsilon_i; \quad i = 1, 2, \dots, k$$

donde se presenta el rendimiento  $Y_i$  como una función  $f$  de parámetros  $\theta_i$  y factores productivos  $X_i$ , más el efecto de un error experimental  $\epsilon_i$ , a una función de este tipo se le denomina superficie de respuesta o función de producción.

La determinación de los niveles óptimos de utilización de insumos en la producción agrícola se puede realizar con el conocimiento previo de la función de producción del cultivo que se investigue.

Para permitir una adecuada estimación estadística y el subsecuente

análisis económico de una función de superficie de respuesta, los experimentos deben partir de un diseño estadístico apropiado.

En la experimentación agrícola se hace uso frecuente de las expresiones diseño de tratamientos y diseño experimental, a ellas nos referiremos para aclarar las diferencias existentes, dentro del contexto del diseño estadístico.

Se entiende por diseño de tratamientos la combinación, número y distribución de los tratamientos seleccionados en un espacio de exploración, también se le conoce como matriz experimental.

Por diseño experimental se entiende el procedimiento mediante el cual se asignan los tratamientos a las unidades experimentales. Los diseños de tratamientos que son particularmente pertinentes para la estimación de superficies de respuesta, son los factoriales completos y los factoriales incompletos, estos últimos comprenden entre otros a los diseños compuestos y rotables.

Aunque ya existen algunas investigaciones relativas al análisis que en cuanto a eficiencia poseen algunas matrices experimentales, este es un campo aún no agotado que en nuestros países apenas empieza a hacer su aparición.

El conocimiento de la eficiencia de las diferentes matrices es impor-

tante desde el punto de vista de los costos en que se incurre durante el proceso investigativo.

Algunas de las matrices experimentales que serán objeto de investigación presentan la ventaja de permitir un análisis económico por método gráfico, ventaja ésta que se muestra de gran importancia para aquellas zonas en donde no existe un fácil acceso al cálculo electrónico.

Los objetivos de esta investigación son comparar algunos diseños de tratamientos ya utilizados en experimentación agrícola, otros de reciente introducción y dos modificaciones que se proponene a una de las matrices bajo estudio; seleccionar con base en los cirterios de sesgo y varianza aquellos diseños de tratamientos que muestren la mejor eficiencia, y obtener recomendaciones sobre el uso de los diseños de tratamientos analizados.

## 2. REVISION DE LITERATURA

El primer intento por definir la naturaleza algebraica de la función de producción en la fertilización de cultivos, fue hecha por E.A. Mistcherlich (17) en 1909. El quizá, fue el primero en sugerir una relación no lineal para relacionar el crecimiento con las disponibilidades de elementos nutritivos.

El conocimiento de la respuesta de un cultivo a diferentes niveles y combinaciones de fertilizantes se favorece ampliamente si se expresan los rendimientos en una función de respuesta para los niveles de fertilización empleados.

Son varios los tipos de modelos estadísticos que se han propuesto como la mejor explicación a cada caso concreto. De ellos quizá el más usado sea el modelo cuadrático o polinomio de segundo grado. Algunas de las consideraciones para su uso son (10):

- i) Proporciona una razonable y adecuada representación de una función de respuesta en una región de interés.
- ii) El proceso de análisis y cómputo se simplifica con su uso.

Algunos estudios empíricos realizados (11) indican la existencia de modelos polinomiales con exponentes enteros o fraccionarios diferentes al cuadrático y raíz cuadrada, cuyo ajuste ha resultado muy significativo.

La estimación de parámetros de los diferentes modelos estadísticos (modelos lineales) pueden efectuarse mediante la utilización del método de mínimos cuadrados teniendo en cuenta el diseño de tratamientos.

## 2.1. Diseños de tratamientos utilizados en la estimación de superficies de respuesta.

Los diseños factoriales completos son definidos por Cochran y Cox (6) como diseños en los cuales se estudian simultáneamente los efectos de cierto número de diferentes factores. Los tratamientos constan de todas las combinaciones que puedan formarse con los distintos factores.

Comparados con otros diseños que se describirán a continuación, los factoriales completos son algo ineficientes si se usan para más de 2 factores debido al gran aumento en el número de tratamientos y por lo tanto aumento en el tamaño de los bloques, en ese caso puede solucionarse parcialmente el problema por la técnica de confusión, en cuyo caso deberán confundirse las interacciones que el investigador juzgue de menor importancia.

Es de presumir que los investigadores que hacen uso de estos diseños se guían por el deseo de obtener observaciones adecuadas, tanto en términos de cobertura de la principal sección de la función, como en la obtención de suficientes observaciones que permitan la estimación del modelo de respuesta propuesto.

Aunque los factoriales incompletos son menos problemáticos que los factoriales completos en lo relativo al número de tratamientos, aun pueden requerir un número grande o no ordinario de tratamientos y unidades experimentales. Es por ello que se ha desarrollado los diseños compuestos, los que tienen como condición importante para su uso el haber sido contruidos para estimar superficies de respuesta cuyo modelo propuesto debe ser un polinomio de segundo grado, especialmente en el caso del diseño com-

puesto central, aunque eso no significa que la información generada con un diseño compuesto central no pueda ser usada para estimar una ecuación de raíz cuadrada (10).

En general los diseños compuestos se construyen agregando más combinaciones de tratamientos a las que se obtienen de un factorial  $2^k$  (6).

Los diseños compuestos se pueden dividir en dos tipos diferentes a saber: compuestos centrales y compuestos no centrales.

Diseños Compuestos Centrales: Su número total de tratamientos es  $2^k + 2k + 1$ , por lo tanto para 2, 3, y 4 variables el diseño requiere de 9, 15 y 25 unidades experimentales respectivamente. Los puntos adicionales  $2^k + 1$  tienen un valor  $\alpha$ , este puede tener cualquier valor excepto cero, este valor puede servir para deducir el sesgo que resulta si la forma verdadera de la superficie no es cuadrática, para lo cual se utilizaría un  $\alpha$  pequeña, si  $\alpha$  se aumenta se incrementan el sesgo y la precisión.

El diseño compuesto central con solo 2 factores no disminuye el número de tratamientos si se le relaciona con el factorial completo, pero a medida que se incrementa el número de factores, aumenta el "ahorro" en número de tratamientos.

Los diseños compuestos no centrales. Tienen  $k$  puntos extras, uno para cada factor. Los puntos adicionales se colocan a una misma distan-

cia desde una de las "esquinas" del factorial  $2^k$  utilizado como básico.

Como el diseño compuesto central (que puede ser rotable por una adecuada elección de puntos experimentales), los diseños rotables son particularmente adecuados para situaciones que incluyan 3 ó más factores variables.

Los diseños rotables se basan en el criterio de rotabilidad propuesto por Box y Hunter (10) según el cual la varianza de una respuesta estimada solo depende de su distancia desde el centro del diseño y no de su dirección desde el centro, de tal modo que los diseños rotables son tales que todas las respuestas estimadas a igual distancia del centro del diseño están situadas en el mismo "contorno" de varianza, dicho de otro modo la respuesta estimada en un punto de la superficie tiene la misma varianza que cualquiera otra respuesta estimada a la misma distancia desde el centro del diseño.

Aunque básicamente las matrices Plan Puebla (18) son diseños compuestos no centrales modificados, se ha decidido describirlas en forma separada dadas sus características especiales.

Debido al gran número de tratamientos de los factoriales completos, se ha estimulado el desarrollo de un gran número de diseños relativos a los factoriales, que específicamente están orientados a la obtención de respuestas continuas. Dos de estos diseños (factoriales incompletos) son

frecuentemente usados en la investigación de superficies de respuesta o funciones de producción.

El primero consiste en la selección un tanto informal de algunos puntos experimentales a partir de un factorial completo: en lugar de estudiar todas las combinaciones posibles de todos los niveles de los factores, solo se estudian algunas de ellas.

Otro diseño factorial incompleto con 2 variables muy usado es el "cuadrado doble"; el grupo de tratamientos de este diseño resulta de seleccionar los tratamientos numerados con números noes en un factorial completo  $5^2$ .

También se incluye entre los factoriales incompletos el diseño San Cristóbal (14) el cual ha sido utilizado en México en investigaciones de caña de azúcar.

En estas matrices está implícito el conocimiento agronómico sobre las relaciones de respuesta del cultivo a varios factores limitantes. Se conoce, por ejemplo, que el maíz responde en conjunto a los fertilizantes nitrogenados y fosfóricos, y además se conoce que la dirección en que aumentan los rendimientos en el espacio bivariado de exploración es la dirección NE. Además al establecer las isocuantas de producción y la isocлина de expansión económica óptima, en la generalidad de los casos, esta última presenta la misma dirección (18).

Tal como señala Hernández (10) una matriz que tenga los puntos orientados en la dirección de las isoclinas dentro de una franja de tamaño arbitrario del espacio factorial, produce menor sesgo dentro de ese espacio que otra matriz del mismo número de tratamientos que no muestre ninguna dirección. Lo que significa que solamente una franja diagonal del espacio factorial presenta interés económico.

Las matrices experimentales tales como el factorial completo y las matrices rotables no aprovechan en su diseño el conocimiento agronómico sobre la dirección del aumento en el rendimiento.

Tal como se dijo, las matrices Plan Puebla son modificaciones de diseños compuestos no centrales, otra denominación que pudieran tomar es la de factoriales aumentados pues básicamente están contruídos por un factorial  $2^k$ , un cuadro o un cubo al que se le han prolongado las aristas ya sea que se trate de 2 ó 3 variables, lo que permite graficar 3 puntos de un factor a un nivel dado del otro y otros factores, particularidad que permite un rápido análisis gráfico de los resultados obtenidos.

Espacio de exploración se define como el área bi, tri o multidimensional que abarca toda combinación posible, según se trate de dos, tres o más factores variables.

Es condición deseable tratar de reducir el espacio de exploración, buscando aislar la mínima y conveniente sección de la función de respues-

ta, en la que se encuentren la combinación óptima económica de los factores, como también combinaciones óptimas de capital limitado.

La razón por la cual se recomienda limitar el espacio de exploración es para protegernos contra el sesgo. Mientras más amplio sea el desarrollo de la función respuesta, mayor será el sesgo con que los modelos aproximativos describan a dicha función.

Como puede notarse, una reducción en el espacio de exploración puede llevar o no incluir el nivel óptimo económico, contra este riesgo sólo la experiencia del investigador puede servir como factor de seguridad.

## 2.2 Selección de un diseño de tratamientos.

Al seleccionar un diseño de tratamientos son varios los criterios que deberán considerarse, el objetivo de la selección será obtener el diseño más adecuado al interés particular del investigador. Al llegar a este punto surge la pregunta ¿qué condiciones debe tener un "buen" diseño de superficie de respuesta? Algunas de las condiciones requeridas han sido señaladas por Box y Draper (3) y Cady y Laird (5), de ellas las más comprensibles pueden ser:

1. Datos interpretables sin necesidad de un análisis extenso.
2. Un número relativamente pequeño de tratamientos.
3. Varianza menor en los coeficientes estimados.

4. Varianza menor de los valores estimados sobre la parte central del espacio factorial.
5. Medición de falta de ajuste.
6. Exclusión de combinaciones cero de un factor y altos niveles de otro factor.
7. Menor sesgo de los valores estimados sobre la parte central del espacio factorial.

El énfasis que estos investigadores ponen sobre la reducción del sesgo y la varianza sobre la zona central del espacio de exploración, obedece al criterio de que la combinación óptima económica de utilización de los insumos debe estar ubicada en dicha zona, siendo condición deseable la minimización tanto del sesgo como de la varianza en la estimación del modelo aproximativo, especialmente en la zona donde se encuentre la combinación óptima económica de utilización de los insumos.

Puede observarse que existen múltiples criterios para seleccionar un diseño de tratamientos, esto ocurre debido a que usualmente el investigador tiene más de un objetivo para un experimento dado.

En el caso de que interese la estimación individual de los coeficientes de regresión debe elegirse un diseño que minimice la varianza de los coeficientes. Pero si lo que interesa es usar la ecuación de regresión estimada para predecir, el concepto de sesgo es más importante (10).

Ambos criterios, sesgo y varianza, han sido los más usados como base de selección en diseños de tratamientos, dándose más importancia, muy recientemente, al concepto de sesgo.

Basándose en estos criterios se han efectuado varios trabajos en donde se han comparado además de los diseños de tratamientos, los modelos aproximativos más usuales.

### 2.3 Error de sesgo.

Wonnacott y Wonnacott (20) definen que  $\hat{\theta}$  es un estimador insesgado de  $\theta$  si

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Se dice que un estimador  $\hat{\theta}$  es sesgado si  $E(\hat{\theta})$  discrepa del parámetro  $\theta$ , por tanto el sesgo se define por

$$\text{Sesgo} = B = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Box y Draper (2) desarrollan el sesgo en función de la matriz alias, así:

$$\text{Sesgo}_{(x)} = \eta_{(x)} - E(\hat{Y}_{(x)})$$

$\eta(x)$  = Modelo real o verdadero

$\hat{Y}(x)$  = Estimador de  $\eta(x)$

La deducción del sesgo es posible bajo los supuestos de

$$\eta(x) = \vec{x}'_1 \vec{\beta}_1 + \vec{x}'_2 \vec{\beta}_2$$

$$\hat{Y}(x) = \vec{x}'_1 \vec{b}_1$$

donde  $\vec{x}_1$  es un vector  $p \times 1$ ,  $p$  es el vector de parámetros a estimar;  $\vec{\beta}_1$  es un vector  $p \times 1$  de coeficientes de regresión y su estimador es el vector  $\vec{b}_1$  de  $p \times 1$ . Las variables y parámetros no incluidos en el modelo propuesto corresponde al vector  $\vec{x}_2$  de orden  $k \times 1$  y al vector  $\vec{\beta}_2$  de orden  $k \times 1$ .  $\vec{b}_1$  es el estimador mínimo cuadrático de  $\vec{\beta}_1$  obtenido por

$$\vec{b}_1 = (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 Y \quad \text{y} \quad E(\vec{b}_1) = (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 E(Y)$$

siendo  $X_1$  una matriz de orden  $N \times p$  cuyas hileras corresponden a los vectores  $\vec{x}'_1$

Por lo tanto

$$E(\hat{Y}(x)) = \vec{x}'_1 E(\vec{b}_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{x}'_1 (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 E(Y) \\
 &= \vec{x}'_1 (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 (X_1 \vec{\beta}_1 + X_2 \vec{\beta}_2) \\
 &= \vec{x}'_1 \vec{\beta}_1 + \vec{x}'_1 A \vec{\beta}_2
 \end{aligned}$$

donde:

$$A = (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 X_2 \quad \text{y se le llama matriz alias,}$$

$X_2$  es una matriz de orden  $N \times k$  cuyas hileras corresponden a los vectores  $\vec{x}'_2$ .

De esta manera el sesgo viene dado por:

$$\text{Sesgo}_{(x)} = \vec{x}'_1 \vec{\beta}_1 + \vec{x}'_2 \vec{\beta}_2 - (\vec{x}'_1 \vec{\beta}_1 + \vec{x}'_1 A \vec{\beta}_2)$$

$$\text{Sesgo}_{(x)} = (\vec{x}'_2 - \vec{x}'_1 A) \vec{\beta}_2$$

Obsérvese que el término de sesgo  $\vec{x}'_1 A \vec{\beta}_2$  depende no solo del modelo aproximativo propuesto para estimar  $\mu(x)$  sino también del diseño de tratamientos (matriz experimental) a través de las matrices  $X_1$  y  $X_2$ .

## 2.4 Varianza.

La función de respuesta presenta una varianza llamada error de varianza, esta varianza tiene dos componentes (5). Uno de ellos es el error experimental  $\sigma^2$  cuyo valor es estimador por  $s^2$ , aparece debido a variaciones aleatorias entre unidades experimentales, en un diseño completamente al azar se conoce como la falta de reproducibilidad del mismo valor en todas las replicaciones correspondientes a un mismo tratamiento.

El segundo componente de la varianza del error es una función de los tratamientos en el espacio factorial y es influenciado por la selección del diseño de tratamientos, esta función aparece en el análisis de regresión como elementos particular de la matriz inversa, su "tamaño" depende del número de tratamientos, distribución en el espacio factorial y número de veces que se replican.

## 2.5 Sesgo y varianza combinados.

Como anteriormente se había anotado, los criterios de selección de un diseño de tratamientos depende del interés que el investigador tenga, inicialmente el criterio predominante era la varianza, ello se hacía bajo el supuesto de que no se cometía sesgo en la estimación de la superficie de respuesta, supuesto que no puede sostenerse fácilmente dado el desconocimiento que se tiene sobre la estructura matemática de la ley natural.

Lo anterior indica la conveniencia de estudiar conjuntamente los efectos del sesgo y la varianza en la selección de un diseño de tratamientos.

Un criterio estadístico que relaciona el sesgo y la varianza es el error medio cuadrático (EMC). Wonnacott y Wonnacott (20) desarrollan el error medio cuadrático como sigue:

$$\text{EMC} = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

$$\text{EMC} = E[(\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}}) + (\mu_{\hat{\theta}} - \theta)]^2$$

$$\text{EMC} = E(\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}})^2 + 2(\mu_{\hat{\theta}} - \theta) E(\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}}) + (\mu_{\hat{\theta}} - \theta)^2$$

$$\text{EMC} = \sigma_{\hat{\theta}}^2 + 0 + (\mu_{\hat{\theta}} - \theta)^2$$

$$\text{EMC} = \sigma_{\hat{\theta}}^2 + B_{\theta}^2$$

$$\text{EMC} = \text{Varianza } (\hat{\theta}) + [\text{SESGO } (\hat{\theta})]^2$$

## 2.6 Eficiencia relativa.

Los elementos de la matriz inversa  $(X' X)^{-1}$  constituyen la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes de regresión del modelo de ajuste (8), los elementos de la diagonal de la matriz inversa son las va-

rianzas de los coeficientes, en tanto que los elementos que no pertenecen a la diagonal constituyen las covarianzas de los coeficientes.

Esto se representa matricialmente por

$$\vec{V}(b) = (X'X)^{-1}$$

donde  $\vec{V}(b)$  = vector de varianzas de los coeficientes de regresión.

Si los elementos de la diagonal de la matriz  $(X'X)^{-1}$  son "pequeños", la varianza de los coeficientes es menor y mayor es la precisión con que se estiman tales coeficientes, es por ello que a la matriz inversa se le llama matriz precisión (16).

Con base en lo anterior, Myers (16) establece que dos diseños pueden compararse sistemáticamente con base en eficiencia, esto es, eficiencia de la estimación particular de los coeficientes del modelo de respuesta. El criterio de eficiencia así desarrollado, toma en consideración simultáneamente la precisión con que el coeficiente es estimado y el número de parcelas experimentales utilizadas en la estimación; en el caso de que interese considerar la comparación entre el diseño A y el diseño B con relación a la estimación del coeficiente  $b_1$ , esta se efectúa mediante la relación:

$$E = \frac{(\text{Varianza de } b_i \text{ del diseño B})/N_B}{(\text{Varianza de } b_i \text{ del diseño A})/N_A}$$

donde  $E$  = Eficiencia

$N_A$  = Número de observaciones utilizadas por el diseño A.

$N_B$  = Número de observaciones utilizadas por el diseño B.

La relación  $N_B/N_A$  se agrega para considerar el costo relativo en la conducción del experimento.

## 2.7 Comparación de diseños de tratamientos.

Folka citado por Escobar (9) establece que dos o más diseños de tratamientos son comparables si están contenidos en el mismo espacio de exploración  $R$ .

Box y Draper (2) señalan que no debe seleccionarse un diseño de tratamientos únicamente con base en el criterio de mínima varianza, pues en realidad son dos las fuentes posibles de discrepancia entre el modelo verdadero,  $\eta(x)$  y el modelo aproximativo propuesto para estimar,  $\hat{Y}(x)$ . La primera fuente tiene su origen en un error de muestreo y la segunda en lo inadecuado del modelo propuesto, llamando a la primera error de varianza y a la segunda error de sesgo. Es con base en ello que proponen como

criterio de selección la minimización de J.

$$J = \frac{N}{\sigma^2} \int_R E[\hat{Y}(x) - \eta(x)]^2 d\vec{x} / \int_R d\vec{x}$$

Donde J representa el error medio cuadrático ponderado sobre todo el espacio de exploración R; y normalizado con respecto al número de observaciones y la varianza. Este criterio tiene la ventaja de que: (a) proporciona un medio para considerar simultáneamente tanto el sesgo como la varianza; (b) No está restringido a considerar solo coeficientes particulares de un modelo, o el sesgo y la varianza en un punto, sino que integra estos criterios sobre todo el espacio de exploración R.

La integral  $\int_R d\vec{x}$  puede escribirse como

$$\int_R d\vec{x} = \frac{1}{\Omega}$$

y

$$J = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R E[\hat{Y}(x) - \eta(x)]^2 d\vec{x}$$

$$J = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R V[\hat{Y}(x)] d\vec{x} + \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R [E(\hat{Y}(x))]^2 d\vec{x}$$

$$J = V + B$$

La primera cantidad corresponde a la varianza de  $Y(x)$  integrada sobre el espacio de exploración  $R$ , y la segunda cantidad corresponde al cuadrado del sesgo similarmente integrado.

El error medio cuadrático y su valor ponderado  $J$ , han sido utilizados por varios investigadores (7, 9, 15), entre estos se destacan Karson (12), Kupper y Meydrech quienes han propuesto nuevas aproximaciones sobre la utilización de este criterio para la minimización del sesgo sobre los diseños de tratamientos.

Myers (16) señala que en la práctica, la minimización de  $J$  es imposible de hacer, por lo que el problema debe enfocarse hacia la minimización bien sea de la varianza o del sesgo, lo cual dependerá del interés del investigador.

Berardo et al. (1) realizó un estudio con trigo bajo condiciones de invernadero, en el cual estimó el sesgo a partir de un factorial  $13 \times 13$ , mediante 40 combinaciones de tratamientos cuyo número varió entre 9 y 17.

El sesgo se estimó con base en

$$\sum \left| \eta(x_1, x_2) - \hat{Y}(x_1, x_2) \right|$$

donde " $\eta(x_1, x_2)$ " son los valores calculados con el modelo "verdadero" y " $\hat{y}(x_1, x_2)$ " son los valores estimados con un determinado modelo y diseño de tratamientos, esto equivale a considerar el sesgo como el volumen que se encuentra entre la superficie de respuesta obtenida con el modelo verdadero y aquella estimada con base en un modelo y una matriz determinada.

La medición del sesgo se realizó sobre dos áreas, una fue la totalidad del espacio factorial de 169 puntos y la otra la formó una franja diagonal de 127 puntos que constituyó un 75% del espacio total.

Dentro de las 40 combinaciones se incluyeron el cuadrado doble y el cuadrado triple como términos comparativos por conocerse su comportamiento con relación al sesgo.

Los resultados indican que el cuadrado doble y cuadrado triple presentaron mayor sesgo, aproximadamente el doble, en relación con las 10 matrices seleccionadas por su menor sesgo.

Además los valores del sesgo muestran que sobre el espacio formado por 127 puntos o sea el 75% del área total, se presentó aproximadamente el 40% del sesgo total, por lo tanto la reducción fue menor en el cuadrado doble y cuadrado triple en donde los tratamientos están distribuidos en forma homogénea sobre el espacio factorial y no sobre una franja como en las ma-

trices experimentales restantes.

Cady y Laird (5) compararon los 9 diseños de tratamientos que se enumeran:

1. Factorial 5 x 5; 25 tratamientos.
2. Compuesto central; 9 tratamientos.
3. Compuesto central modificado por Myers; 9 tratamientos.
4. Factorial rotado 3 x 3; 9 tratamientos.
5. Factorial incompleto 5 x 5; 13 tratamientos.
6. Factorial incompleto modificado por Escobar; 13 tratamientos.
7. Factorial incompleto 7 x 7; 17 tratamientos.
8. Factorial 3 x 3; 9 tratamientos.
9. Compuesto central modificado por Thompson; 12 tratamientos.

La comparación se hizo con base en los criterios de sesgo residual, índice de sesgo integrado, e índice de varianza de Y.

El sesgo residual  $|\eta - \hat{Y}|$  se define como la diferencia entre la verdadera respuesta " $\eta$ " y la respuesta estimada,  $\hat{Y}$ . Los resultados muestran que el compuesto central, el factorial 5 x 5 completo e incompleto, el factorial incompleto 7 x 7 ó el factorial rotado 3 x 3 fueron los peores comparados con los diseños modificados por Myers, Escobar y Thompson.

Sesgo Integrado. Este concepto que fue desarrollado por Cady y Laird (4)

considera el sesgo como la diferencia absoluta integrada sobre el espacio factorial "s"

$$\int_S |E(\hat{Y}(x)) - \eta(x)| dx$$

Con una variable independiente el sesgo se mediría como el área entre el modelo verdadero y el modelo propuesto. En caso de 2 variables el sesgo sería el volumen existente entre ambos modelos. Se encontró que el sesgo integrado es mayor sobre los factoriales 3 x 3 seguido por los factoriales completo e incompleto 5 x 5. Los diseños modificados son relativamente bajos en sesgo y la influencia del número y distribución de los puntos experimentales se mostró por el valor intermedio de factorial incompleto 7 x 7.

Las comparaciones con base en la varianza mostraron que los diseños de menor sesgo, proporcionan una mayor varianza de  $\hat{Y}(x)$ .

El sesgo se disminuyó al restringir combinaciones de tratamientos a un área del espacio factorial que no incluyó los límites de dicho espacio, aunque en los límites se ocasionó mayor desviación, pero en la mayor parte del espacio factorial - donde se espera incluir el área en la cual ocurre el óptimo económico- el modelo aproximativo se acercó más al modelo verdadero.

Hernández (11) comparó 11 matrices experimentales desde el punto de

vista del sesgo, para ello midió el sesgo sobre:

1. El espacio total de exploración.
2. Una franja diagonal de orientación NE que correspondió al 75% del espacio total y sobre la cual se espera que se aloje la isoclina de expansión económica óptima.

En este estudio el concepto de sesgo fue el mismo utilizado anteriormente por Cady y Laird (4).

Los resultados indicaron que, en las matrices con 9 tratamientos, Box-Myers, cuadrado con aristas prolongadas [1], cuadrado con aristas prolongadas [2] y Box-Berardo et al. presentan similar eficiencia en cuanto al sesgo y logran superar a las matrices Box, cuadrado doble y San Cristóbal.

Entre las matrices con 13 tratamientos la mejor fue la Box-Berardo et al aumentada [3], pero fue similar a la cuadrado doble modificada por Escobar y a Box-Berardo et al aumentada [2], las que fueron mejores que el cuadrado doble. La matriz San Cristóbal fue la que presentó mayor sesgo.

Aunque no hubo ganancia notable en cuanto al sesgo al pasar de 9 a 13 tratamientos, las consideraciones que sobre economía del diseño pudieran hacerse serían favorables al diseño con menor número de tratamientos.

Martínez (15) estableció comparaciones entre algunos diseños de uso

común en la investigación agrícola, los diseños elegidos para la comparación fueron: compuesto central de Box modificado por Myers; compuesto central de Box modificado por Berardo; matriz Berardo-Hernández uno; matriz Berardo-Hernández dos; cuadrado doble; cuadrado doble modificado por Escobar; matriz San Cristóbal.

Las matrices Berardo-Hernández uno y dos son las mismas que Hernández denominó cuadrado con aristas prolongadas [1] y cuadrado con aristas prolongadas [2].

Los criterios de comparación utilizados fueron el sesgo y la varianza, para lo cual se utilizó el concepto propuesto por Box y Draper (2) los que utilizan una minimización del error medio cuadrático. Los resultados indicaron que el conjunto formado por las matrices compuesto modificado por Myers, las matrices Berardo-Hernández y el cuadrado doble modificado tuvieron menor sesgo que el cuadrado doble. San Cristóbal y compuesto modificado por Berardo. Dentro del primer grupo las matrices Berardo-Hernández y el compuesto modificado por Myers produjeron menor sesgo que el cuadrado doble modificado por Escobar.

Las matrices experimentales con bajos valores de Varianza, no condujeron a valores mínimos de sesgo (condición óptima de una matriz) sino que por el contrario parece existir una relación inversa entre los componentes Varianza y Sesgo, observada, hasta ahora, en forma empírica.

Turrent y Laird (18) establecieron comparaciones en varios diseños de tratamientos, utilizando como criterio la eficiencia en cuanto al sesgo y la precisión. Estos autores utilizaron algunas de las matrices estudiadas por Hernández y asimismo hacen uso de los mismos datos para hacer su análisis.

Las matrices estudiadas son: Plan Puebla I, Plan Puebla II, Plan Puebla III, San Cristóbal, cuadrado doble, central compuesto rotatable de Box, central compuesto de Box modificado por Myers y cuadrado doble modificado por Escobar. Las matrices aquí denominadas Plan Puebla II y III son las mismas que Martínez llamó Berardo-Hernández uno y Berardo-Hernández dos, respectivamente.

Las conclusiones a que se llega con relación al sesgo son las mismas que se obtuvieron en el trabajo de Hernández.

Para juzgar la eficiencia en cuanto a precisión entre matrices experimentales, se usa como criterio de comparación la varianza de los valores calculados  $\hat{Y}$ , cuando la matriz experimental tiene 2 factores independientes, para calcular los estimadores de las varianzas de los valores calculados  $V(\hat{Y}_{ij})$  en donde  $i$  representa el  $i$ -ésimo nivel del factor 1 y  $j$  el  $j$ -ésimo nivel del factor 2, la varianza de  $Y_{ij}$  es:

$$V(\hat{Y}_{ij}) = \vec{X}_{ij}' (X'X)^{-1} \vec{X}_{ij} \sigma^2 = C_{ij} \sigma^2$$

en donde  $C_{ij}$  es un coeficiente que al multiplicarlo por  $\sigma^2$  resulta en el estimador de  $V(Y_{ij})$ , dicho coeficiente depende de la matriz experimental, el modelo aproximativo y de la posición de los puntos en el espacio de exploración.

Entre sus resultados Turrent y Laird encontraron que los valores de  $C_{ij}$  eran mayores sobre el área que no incluía la franja de dirección NE, en tanto que los valores calculados sobre esta área produjeron bajos valores de  $C_{ij}$ .

Con relación a las matrices Plan Puebla se encontró que son sumamente ineficientes desde el punto de vista de precisión en el área (25%) que se localiza fuera de la franja diagonal NE.

Al juzgar la eficiencia de las matrices a lo largo de la franja diagonal (75% del espacio de exploración, las matrices Plan Puebla son en general similares a las matrices Box-Myers y San Cristóbal pero son inferiores a la matriz cuadrado doble.

### 3. MATERIALES Y METODOS

Con base en 12 experimentos de campo, realizados en 40 localidades en ambos semestres de varios años ejecutados por el programa de cereales del Instituto Colombiano Agropecuario, se analizó el efecto de nitrógeno y fósforo sobre el rendimiento en el cultivo de trigo. Los datos se obtuvieron a partir de un factorial completo 4x4, con ellos se procedió a efectuar el ajuste de superficie de respuesta para lo cual se utilizó la recomendación proporcionada por Berardo et al (1) en el sentido de, con base en los modelos cuadrático y raíz cuadrada hacer combinaciones que proporcionen dos modelos puros y dos modelos mixtos, pero agregando este criterio a la interacción NP, con lo cual se obtuvo un total de diez modelos, con los cuales se exploró un espacio factorial bivariado.

Los criterios de selección para el modelo fueron: coeficiente de determinación ( $R^2$ ), cuadrado medio error (CME), prueba de F, coeficiente de variación (CV) y suma de cuadrados parciales (SCP). El modelo seleccionado con base en los anteriores criterios de ajuste se utilizó como "modelo verdadero" y como modelo propuesto o estimador se seleccionó uno de los modelos de ajuste intermedio.

#### 3.1 Metodología.

Como criterio de comparación se utilizó el propuesto por Box y Draper (2) en el sentido de minimizar J.

$$J = \frac{N}{\sigma^2} \int_R E [\hat{Y}(x) - \eta(x)]^2 dx$$

donde:  $\frac{1}{\Omega} = \int_R dx$

J puede desarrollarse como sigue:

$$J = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R \text{Var}[\hat{Y}(x)] d\vec{x} + \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R [E(\hat{Y}(x)) - \eta(x)]^2 d\vec{x}$$

$$V = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R \text{Var}[\hat{Y}(x)] d\vec{x}$$

$$B = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R [E(\hat{Y}(x)) - \eta(x)]^2 d\vec{x}$$

$$J = V + B$$

La solución presentada por Box y Draper es:

Si el modelo estimado es de grado  $d_1$

$$\hat{Y}(x) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k$$

En notación matricial se tiene

$$\hat{Y}(x) = \vec{x}_1' \vec{b}_1$$

donde  $\vec{b}_1' = (b_0, b_1, \dots, b_k)$

$$\vec{x}_1' = (1, x_1, \dots, x_k)$$

Y se tiene que el modelo verdadero es de grado mayor  $d_2$

$$\eta(x) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \beta_{11} X_1^2 + \dots + \beta_{kk} X_k^2 \\ + \beta_{12} X_1 X_2 + \dots + \beta_{(k-1)k} X_{k-1} X_k + \beta_{111} X_1^3 + \dots$$

En notación matricial

$$\eta(x) = \vec{x}'_1 \vec{\beta}'_1 + \vec{x}'_2 \vec{\beta}'_2$$

donde  $\vec{\beta}'_1 = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$

$$\vec{x}'_1 = (1, X_1, \dots, X_k)$$

$$\vec{\beta}'_2 = (\beta_{11}, \beta_{22}, \dots, \beta_{kk}; \beta_{12}, \beta_{13}, \dots, \beta_{(k-1)k}; \beta_{111}, \dots)$$

$$\vec{x}'_2 = (X_1^2, X_2^2, \dots, X_k^2; X_1 X_2 X_3, \dots, X_{k-1} X_k; X_1^3, \dots)$$

De modo que  $J = V + B$  se puede descomponer así:

$$V = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R \vec{x}'_1 (X_1 \ X_1)^{-1} \vec{y}'_1 \sigma^2 dx$$

$$B = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R \vec{\beta}_2^1 [A^1 \vec{x}_1 - \vec{x}_2] [\vec{x}_1^1 A - \vec{x}_2^1] \vec{\beta}_2 d\vec{x}$$

donde.  $A = \text{Matriz alias} = (X_1^1 X_1)^{-1} (X_1^1 X_2)$

En este estudio se utilizó la metodología propuesta por Martínez (15), en el sentido de sustituir el postulado de Box y Draper,  $\eta(x) =$

$$\vec{x}_1^1 \vec{\beta}_1 + \vec{x}_2^1 \vec{\beta}_2 \quad \text{por}$$

$$\eta(x) = \beta_0 + \beta_1 X_1^{\theta_1} + \beta_2 X_2^{\theta_2} + \beta_{11} X_1^{\theta_3} + \beta_{22} X_2^{\theta_4} + \beta_{12} X_1^{\theta_5} X_2^{\theta_6}$$

En notación matricial

$$\eta(x) = \vec{x}_2^1 \vec{\beta}_2$$

donde

$$\vec{x}_2^1 = (1, X_1^{\theta_1}, X_2^{\theta_2}, X_1^{\theta_3}, X_2^{\theta_4}, X_1^{\theta_5}, X_2^{\theta_6})$$

$$\vec{\beta}_2^1 = (\beta_0^1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{12})$$

en tanto el estimador en notación matricial será:

$$\hat{Y}(x) = \vec{x}_1^1 \vec{b}_1$$

donde

$$\vec{x}_1^1 = (1, x_1^{\theta_a}, x_2^{\theta_b}, x_1^{\theta_c}, x_2^{\theta_d}, x_1^{\theta_e}, x_2^{\theta_f})$$

$$\vec{b}_1^1 = (b_0, b_1, b_1, b_{11}, b_{22}, b_{12})$$

s e sabe que el sesgo está definido por

$$\text{Sesgo}(x) = (\vec{x}_2^1 - \vec{x}_1^1 A) \vec{\beta}_2$$

Sustituyendo, tenemos

$$B = \frac{N \Omega}{\sigma^2} \int_R [(\vec{x}_2^1 - \vec{x}_1^1 A) \vec{\beta}_2]^2 d\vec{x}_1 d\vec{x}_2$$

$$S_i K_1 = \frac{N \Omega}{\sigma^2} = \text{constante}$$

$$B = k_1 \iint [((1, x_1^{\theta_a}, x_2^{\theta_b}, x_1^{\theta_c}, x_2^{\theta_d}, x_1^{\theta_e}, x_2^{\theta_f}) -$$

$$(1, x_1^{\theta_a}, x_2^{\theta_b}, x_1^{\theta_c}, x_2^{\theta_d}, x_1^{\theta_e}, x_2^{\theta_f}, )A) \vec{\beta}_2]^2 d\vec{x}_1 d\vec{x}_2$$

$$\vec{x}_2^1 \vec{\beta}_2 = \beta_0 + \beta_1 x_1^{\theta} + \beta_2 x_2^{\theta} + \beta_{11} x_1^{\theta 3} + \beta_{22} x_2^{\theta 4} + \beta_{12} x_1^{\theta 5} x_2^{\theta 6}$$

Matriz alias  $A = (x_1^1 \ x_1)^{-1} (x_1^1 \ x_2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

$$A \vec{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \Sigma a_{1i} & \beta_i \\ \Sigma a_{2i} & \beta_i \\ \Sigma a_{3i} & \beta_i \\ \Sigma a_{4i} & \beta_i \\ \Sigma a_{5i} & \beta_i \\ \Sigma a_{6i} & \beta_i \end{bmatrix} \quad i = 2, \dots, 6$$

$$\vec{x}_1 \vec{A} \vec{\beta}_2 = \sum a_{1i} \beta_i + x_1^0 \sum a_{2i} \beta_i + x_2^0 \sum a_{3i} \beta_i + x_1^0 x_2^0 \sum a_{4i} \beta_i + x_1^0 x_2^0 \sum a_{5i} \beta_i + x_1^0 x_2^0 \sum a_{6i} \beta_i$$

$$B = k_1 \iint [x_1^0 \beta_1 + x_2^0 \beta_2 + x_1^0 x_2^0 \beta_{11} + x_2^0 x_1^0 \beta_{22} + x_1^0 x_2^0 \beta_{12}]$$

$$- a_{12} \beta_1 - a_{13} \beta_2 - a_{14} \beta_{11} - a_{15} \beta_{22} - a_{16} \beta_{12}$$

$$-x_1^0 a_{22} \beta_1 - x_1^0 a_{23} \beta_2 - x_1^0 a_{24} \beta_{11} - x_1^0 a_{25} \beta_{22} - x_1^0 a_{26} \beta_{12}$$

$$-x_2^0 a_{32} \beta_1 - x_2^0 a_{33} \beta_2 - x_2^0 a_{34} \beta_{11} - x_2^0 a_{35} \beta_{22} - x_2^0 a_{36} \beta_{12}$$

$$-x_1^0 a_{42} \beta_1 - x_1^0 a_{43} \beta_2 - x_1^0 a_{44} \beta_{11} - x_1^0 a_{45} \beta_{22} - x_1^0 a_{46} \beta_{12}$$

$$-x_2^0 a_{52} \beta_1 - x_2^0 a_{53} \beta_2 - x_2^0 a_{54} \beta_{11} - x_2^0 a_{55} \beta_{22} - x_2^0 a_{56} \beta_{12}$$

$$-x_1^0 x_2^0 a_{62} \beta_1 - x_1^0 x_2^0 a_{63} \beta_2 - x_1^0 x_2^0 a_{64} \beta_{11} - x_1^0 x_2^0 a_{65} \beta_{22}$$

$$-x_1^0 x_2^0 a_{66} \beta_{12}]^2 dx_1 dx_2$$

Al definir el espacio de exploración  $R$ , la expresión  $B$  toma un valor real.

Análogamente se procedió para estimar la varianza

$$V = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \iint \vec{x}' (x_1' x_1)^{-1} \vec{x}_1 dx_1 dx_2$$

donde  $(x_1' x_1)^{-1} = W =$

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} & W_{15} & W_{16} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ W_{61} & W_{62} & W_{63} & W_{64} & W_{65} & W_{66} \end{bmatrix}$$

$$S_i \frac{N\Omega}{\sigma^2} = k_2 = \text{constante}$$

$$V = k_2 \iint \vec{x}' W \vec{x}_1 dx_1 dx_2$$

$$\vec{x}' W = (\sum x_i w_{i1}, \sum x_i w_{i2}, \sum x_i w_{i3}, \sum x_i w_{i4}, \sum x_i w_{i5}, \sum x_i w_{i6})$$

$$\vec{x}' W \vec{x}_1 = [\sum x_i w_{i1}, \sum x_i w_{i2}, \sum x_i w_{i4}, \sum x_i w_{i5}, \sum x_i w_{i6}] \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_a \\ x_1 \\ \theta_b \\ x_2 \\ \theta_c \\ x_1 \\ \theta_d \\ x_2 \\ \theta_e \\ x_1 \\ \theta_f \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}'W\vec{X}' = \sum_i X_i W_{i1} + X_1^a \sum_i X_i W_{i2} + X_2^b \sum_i X_i W_{i3} + X_1^c \sum_i X_i W_{i4} + X_2^d \sum_i X_i W_{i5} + X_1^e X_2^f \sum_i X_i W_{i6}$$

$$\vec{X}'W\vec{X}'_1 = \sum_i \sum_j X_i X_j W_{ij}$$

$$V = k_2 \iint (W_{11} + X_1^a W_{21} + X_2^b W_{31} + X_1^c W_{41} + X_2^d W_{51} + X_1^e X_2^f W_{61})$$

$$+ X_1^a W_{12} + X_1^a X_1^a W_{22} + X_1^a X_2^b W_{32} + X_1^a X_1^c W_{42} + X_1^a X_2^d W_{52} + X_1^a X_2^e X_2^f W_{62}$$

$$+ X_2^b W_{23} + X_2^b X_1^a W_{23} + X_2^b X_2^b W_{33} + X_2^b X_1^c W_{43} + X_2^b X_2^d W_{53} + X_2^b X_1^e X_2^f W_{63}$$

$$+ X_1^e W_{14} + X_1^e X_1^a W_{24} + X_1^e X_2^b W_{34} + X_1^e X_1^c W_{44} + X_1^e X_2^d W_{54} + X_1^e X_1^e X_2^f W_{64}$$

$$\sim + X_2^d W_{25} + X_2^d X_1^a W_{25} + X_2^d X_2^b W_{35} + X_2^d X_1^c W_{45} + X_2^d X_2^d W_{55} + X_2^d X_1^e X_2^f W_{65}$$

$$+ X_1^e X_2^f W_{16} + X_1^e X_2^f X_1^a W_{26} + X_1^e X_2^f X_2^b W_{36} + X_1^e X_2^f X_1^c W_{46} + X_1^e X_2^f X_2^d W_{56}$$

$$+ X_1^e X_2^f X_1^e X_2^f W_{66} ) dx_1 dx_2$$

Al definir el espacio de exploración R, la expresión V toma un valor real.

Para la solución de las operaciones matriciales que fueron necesarias, se utilizó el procedimiento matrix de SAS 76 (Statistical Analysis System), y para resolver las integrados dobles se crearon los correspondientes programas que fueron desarrollados en una calculadora Hewlett Packard modelo 9810A.

También se utilizó el criterio de eficiencia relativa propuesto por Myers (16), con ello se buscó obtener una comparación relacionada a la precisión sobre la estimación de los coeficientes de regresión y el costo relativo de la conducción de experimentos mediante la utilización de las distintas matrices experimentales evaluadas.

Diseños de tratamientos que se compararon.

Los diseños de tratamientos seleccionados fueron:

Número del diseño	Diseños de tratamientos	Número de Tratamientos
1	Compuesto central de Box modificado por Myers	9
2	Compuesto central de box modificado por Berardo	9
3	Plan Puebla Dos	9
4	Plan Puebla Tres	9
5	Cuadrado doble modificado por Escobar	13
6	Compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández	13
7	Plan Puebla modificado [1]	13
8	Plan Puebla dos modificado [2]	17

La selección se basó en los resultados obtenidos en otras investigaciones (5, 9, 11, 15,18) en las cuales los primeros diseños mostraron ser bastante eficientes en cuanto al sesgo y algunos de ellos medianamente adecuados desde el punto de vista de varianza. Los diseños siete y ocho son dos modificaciones que se proponen a la matriz Plan Puebla dos, el objetivo de estas modificaciones es observar cómo se comportan el sesgo y la varianza cuando se aumentan puntos experimentales y se concentran en una sección del espacio de exploración.

CUADRO 1. Lista de las 8 matrices seleccionadas, codificadas en un intervalo -1 a +1.

Número del Tratamiento	Número de la matriz							
	1		2		3		4	
1	-0.6	-0.6	-0.5	-0.5	-0.3	-0.3	-0.4	-0.4
2	-0.6	+0.6	-0.5	+0.5	-0.3	+0.3	-0.4	+0.4
3	+0.6	-0.6	+0.5	-0.5	+0.3	-0.3	+0.4	-0.4
4	+0.6	+0.6	+0.5	+0.5	+0.3	+0.3	+0.4	+0.4
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	-0.9	0	-0.75	0	-0.9	-0.3	-0.9	-0.4
8	0	-0.9	0	-0.75	-0.3	-0.9	-0.4	-0.9
9	0	+0.9	0	+0.75	+0.3	+0.9	+0.4	+0.9

CUADRO 1. (Continuación)

Número del Tratamiento	Número de la matriz							
	5		6		7		8	
1	-0.85	-0.85	-0.5	-0.5	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3
2	-0.85	+0.85	-0.5	+0.5	-0.3	0	-0.3	0
3	+0.85	-0.85	+0.5	-0.5	-0.3	+0.3	-0.3	+0.3
4	+0.85	+0.85	+0.5	+0.5	+0.5	+0.3	+0.3	-0.3
5	-0.40	-0.40	0	0	+0.3	0	+0.3	0
6	-0.40	+0.40	-0.75	0	+0.3	+0.3	+0.3	+0.3
7	+0.40	-0.40	+0.75	0	0	0	0	-0.3
8	+0.40	+0.40	0	-0.75	0	-0.3	0	+0.3
9	0	0	0	+0.75	0	+0.3	0	0
10	-0.85	0	-0.5	0	-0.9	-0.3	-0.6	-0.3
11	+0.85	0	0	-0.5	+0.9	+0.3	+0.6	+0.3
12	0	-0.85	-0.0	-1.0	-0.3	-0.9	-0.9	-0.3
13	0	+0.85	+1.0	+1.0	+0.3	+0.9	+0.9	+0.3
14							-0.3	-0.6
15							+0.3	+0.6
16							-0.9	-0.9
17							+0.3	+0.9

La representación gráfica de las 8 matrices experimentales del Anexo A muestra la distribución de los puntos experimentales (tratamientos) en el espacio bifactorial R codificados en el intervalo -1 a +1.

CUADRO No. 2. Lista de las 8 matrices seleccionadas, tratamientos sin codificar.

Número del Tratamiento	Número de la matriz							
	<sup>1</sup> x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	<sup>2</sup> x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	<sup>3</sup> x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	<sup>4</sup> x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	34	95	40	100	52	110	46	105
2	34	155	40	150	52	140	46	145
3	106	95	100	100	88	110	94	105
4	106	155	100	150	88	140	94	145
8	70	125	70	125	70	125	70	125
6	16	125	25	125	16	110	16	105
7	124	125	115	125	124	140	124	145
8	70	80	70	87.5	52	80	46	80
9	70	170	70	162.5	88	170	94	170

Número del Tratamiento	Número de la matriz							
	5		6		7		8	
	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$
1	19	82.5	40	110	52	110	52	110
2	19	167.5	40	150	52	125	52	125
3	121	82.5	100	110	52	140	52	140
4	121	167.5	100	150	88	110	88	110
5	46	105	70	125	88	125	88	125
6	46	145	25	125	88	140	88	140
7	94	105	115	125	70	125	70	110
8	94	145	70	87.5	70	110	70	140
9	70	125	70	162.5	70	140	70	125
10	19	125	40	125	16	110	34	110
11	121	125	70	110	124	140	106	140
12	70	82.5	10	75	52	80	16	110
13	70	167.5	130	175	88	170	124	140
14							52	95
15							88	155
16							52	30
17							88	170

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSION.

El análisis estadístico del efecto del Nitrógeno y Fósforo sobre el rendimiento de trigo proporcionó la siguiente ecuación de regresión que se tomó como modelo verdadero:

$$Y_{(N,P)} = 2729.3399 + 17.55N + 6.614P - 0.26731174N^2 - 0.01746831P^2 + 0.00082769NP$$

Se consideró conveniente utilizar este modelo como verdadero dado el gran número de experimentos utilizados en su estimación y la representatividad de los mismos, además de que los estadísticos de selección, que se muestran en el Cuadro 3, mostraron una buena bondad de ajuste.

CUADRO 3. Análisis de varianza para regresión para el modelo de mejor ajuste.

Fuente de variación	GL	Suma de Cuadrados	Suma de cuadrados parciales	Cuadrados medios
Regresión	5	2654114.2611		530822.8524**
N	1		394619.9211	394619.9211**
P	1		926064.1239	926064.1239**
N <sup>2</sup>	1		350277.5455	350277.5455**
P <sup>2</sup>	1		154478.0795	154478.0795**
NP	1		86.7038	86.7038NS
Error	10	137653.4918		
Total	15	2791767.7540		

R<sup>2</sup> = 95.07%  
CV = 3.80%

\*\* = Significativo al 1%  
NS = No significativo

Como se observa, la interacción NP No fue significativa, pero se incluyó en el modelo pues aunque el análisis estadístico no logró detectar significancia en este efecto, él existe biológicamente y permite explicar de una manera más eficiente el fenómeno.

Como modelo propuesto se seleccionó el modelo raíz cuadrada:

$$\hat{Y}_{(N,P)} = \beta_0 + \beta_1 N + \beta_2 P + \beta_{11} N^{0.5} + \beta_{22} P^{0.5} + \beta_{12} NP$$

#### 4.1 Varianzas de las matrices evaluadas.

##### 4.1.1. Varianzas de los coeficientes de regresión para el modelo de ajuste.

Las varianzas de los coeficientes de regresión se manifiestan como elementos de la diagonal de la matriz inversa  $(x_1' x_1)^{-1}$ , si los valores de la diagonal se multiplican por el cuadrado medio del error se obtienen los estimadores de las varianzas de los coeficientes de regresión, en nuestro caso mantendremos  $\sigma^2$  constante para todos los diseños de tratamientos y solamente consideraremos la variación que es inherente a las matrices experimentales como una función de los elementos de la diagonal de la matriz inversa.

Los valores obtenidos, que se muestran en el Cuadro 4, indican que la

menor varianza se le asignó al cuadrado doble modificado por Escobar, esto ocurre debido a la distribución uniforme y homogénea de los puntos experimentales sobre la totalidad del espacio factorial, en segundo lugar se ubicó el compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, en una posición intermedia se ubicaron Plan Puebla Dos, Plan Puebla Tres, Plan Puebla Dos modificado [1], Plan Puebla Dos modificado [2] y el compuesto central de Box modificado por Myer, el último lugar, o sea el de mayor varianza, lo ocupó el compuesto central de Box modificado por Berardo.

Es de notar que tanto Plan Puebla Dos modificado [1] y Plan Puebla Dos modificado [2] mostraron menor varianza que el Diseño Plan Puebla Dos.

Al hacer una consideración general sobre todos los diseños, se observa que las varianzas de todos los diseños son altas, esto ocurre porque el modelo de ajuste corresponde a un modelo raíz cuadrada y los diseños evaluados han sido diseñados específicamente para la estimación de modelos de segundo orden. También puede observarse que los coeficientes que mostraron mayor varianza fueron  $\beta_0$ ,  $\beta_{11}$  y  $\beta_{22}$  o sea los coeficientes correspondientes a la ordenada al origen y los coeficientes exponenciales, ello se explica como un producto del modelo de ajuste utilizado y al menor número de tratamientos utilizados para estimar estos coeficientes, incluso en el caso de la ordenada al origen, no se ubicó ningún tratamiento con niveles cero para ninguno de los dos factores independientes cor-

CUADRO 4. Elementos de la Diagonal de la matriz precisión  $(x' x)^{-1}$  para el modelo propuesto

$$\hat{Y}(N,P) = \beta_0 + \beta_1 N + \beta_2 P + \beta_{11} N^{0.5} + \beta_{22} P^{0.5} + \beta_{12} NP$$

DISEÑO DE TRATAMIENTO	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_{11}$	$\beta_{22}$	$\beta_{12}$
BOX-MYERS	1445.83	0.0121321	0.0823011	2.11163	39.5585	2143347 E - 13
BOX-BERARDO	3291.97	0.0285918	0.176985	5.50889	82.827	4444444 E - 13
PLAN PUEBLA DOS	1881.21	0.108939	0.259859	4.10221	80.5228	0.0000028673
PLAN PUEBLA TRES	1612.1	0.0442355	0.157522	2.82443	58.3025	8786501 E - 13
CUADRADO DOBLE ESCOBAR	413.212	0.00426386	0.0301724	0.819949	14.5214	5072582 E - 14
BOX-BERARDO-HERNANDEZ	783.4	0.0215493	0.0784428	1.79666	31.3328	3295320 E - 13
PLAN PUEBLA MODIFICADO [1]	1625.62	0.101339	0.236582	3.62675	71.915	0.0000027498
PLAN PUEBLA MODIFICADO [2]	1290.38	0.0682379	0.16919	2.71897	53.7476	0.0000018321

siderados, razón esta por la cual  $\beta_0$  mostró la máxima varianza en todos los diseños de tratamientos.

#### 4.1.2. Eficiencia Relativa.

La eficiencia relativa se midió utilizando el criterio propuesto por Myers, en el cuadro 5 se muestran las relaciones de eficiencia obtenidos al comparar las matrices evaluadas utilizando como comparador el cuadro doble modificado por Escobar, este comparador se seleccionó dado que presentó la mínima varianza para todos los coeficientes de regresión o sea que fue el diseño que mostró mayor eficiencia en la estimación particular de los coeficientes de regresión.

CUADRO 5. Eficiencia relativa de los diseños de tratamientos utilizando como comparador el diseño cuadrado doble modificado por Escobar

Diseño de tratamientos	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_{11}$	$\beta_{22}$	$\beta_{12}$
Box-Myers	0.19	0.24	0.37	0.27	0.25	0.17
Box-Berardo	0.08	0.10	0.17	0.10	0.12	0.08
Plan Puebla Dos	0.15	0.03	0.12	0.14	0.13	0.02
Plan Puebla Tres	0.17	0.07	0.19	0.20	0.17	0.04
Box-Berardo-Hernández	0.53	0.19	0.56	0.46	0.46	0.20
Plan Puebla Modificado [1]	0.25	0.04	0.19	0.23	0.20	0.07
Plan Puebla Modificado [2]	0.42	0.08	0.34	0.39	0.35	0.14

Los resultados obtenidos indican que las matrices experimentales más eficientes fueron el compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, Plan Puebla Dos modificado [2], compuesto central de Box y Plan Puebla Dos modificado [1], siendo Plan Puebla Tres, compuesto central de Box modificado por Berardo y Plan Puebla Dos las matrices de menor eficiencia, esto indica que la eficiencia relativa se manifestó como función del número y distribución de los tratamientos en el espacio factorial pues la mínima varianza estuvo asociada a los diseños que presentaron tanto una distribución más uniforme de los tratamientos sobre el espacio de exploración como un aumento de los mismos.

Los diseños modificados se compararon utilizando como comparadores los diseños que sirvieron de base a las modificaciones, estas comparaciones aparecen en los cuadros 6 y 7. Los resultados así obtenidos muestran que las modificaciones fueron más eficientes que las matrices experimentales, la característica principal que exhiben las modificaciones es el aumento en el número de los tratamientos y, como ocurre en Plan Puebla Dos modificado [2] y el compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, una dispersión de los tratamientos adicionales con relación al tratamiento central, en el caso de Plan Puebla Dos modificado [1] la dispersión es más limitada y este diseño muestra la menor eficiencia relativa al relacionársele con los valores de eficiencia obtenidos por los otros diseños modificados.

CUADRO 6. Eficiencia relativa del diseño compuesto central de Box modificado por Berardo y Aumentado por Hernández, al utilizar como comparador el compuesto central de Box modificado por Berardo.

DISEÑO DE TRATAMIENTO	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_{11}$	$\beta_{22}$	$\beta_{12}$
Box-Berardo-Hernández	6.07	1.92	3.26	4.43	3.82	1.95

CUADRO 7. Eficiencia relativa de los diseños Plan Puebla Dos modificados al utilizar como comparador el Plan Puebla Dos.

DISEÑO DE TRATAMIENTOS	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_{11}$	$\beta_{22}$	$\beta_{12}$
Plan Puebla modificado [1]	1.67	1.55	1.58	1.63	1.62	1.50
Plan Puebla modificado [2]	2.76	3.02	2.90	2.85	2.83	2.98

El diseño compuesto central de Box modificado por Escobar y aumentado por Hernández muestra su mayor eficiencia en la estimación del coeficiente correspondiente a la ordenada al origen, ello se debe a que los tratamientos adicionales se ubican en la zona sur oeste del espacio de exploración, zona que da lugar a la estimación de dicho coeficiente.



$$-x_1 a_{22} \beta_1 - x_1 a_{23} \beta_2 - x_1 a_{11} \beta - x_1 a_{25} \beta_{22} - x_1 a_{26} \beta_{12}$$

$$-x_2 a_{32} \beta_1 - x_2 a_{33} \beta_2 - x_2 a_{34} \beta_{11} - x_2 a_{35} \beta_{22} - x_2 a_{36} \beta_{12}$$

$$-x_1^{0.5} a_{24} \beta_1 - x_1^{0.5} a_{43} \beta_2 - x_1^{0.5} a_{44} \beta_{11} - x_1^{0.5} a_{45} \beta_{22} - x_1^{0.5} a_{46} \beta_{12}^2$$

$$-x_2^{0.5} a_{52} \beta_1 - x_2^{0.5} a_{53} \beta_2 - x_2^{0.5} a_{54} \beta_{11} - x_2^{0.5} a_{55} \beta_{22} - x_2^{0.5} a_{56} \beta_{12}$$

$$-x_1 x_2 a_{62} \beta_1 - x_1 x_2 a_{63} \beta_2 - x_1 x_2 a_{64} \beta_{11} - x_1 x_2 a_{65} \beta_{22} - x_1 x_2 a_{66} \beta_{12}^2$$

$$dx_1 dx_2$$

El espacio de exploración  $R$  está definido por los límites [10, 130] y [75, 175] para  $N = X_1$  y  $P = X_2$  respectivamente para ambos polinomios, estos límites abarcan la totalidad del espacio factorial  $R$ .

#### 4.2.1 Varianza de los valores estimados.

La varianza de los valores estimados, obtenidos mediante el componente  $V$  indican que, en general los diseños de menor varianza fueron el cuadrado doble modificado por Escobar, compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, compuesto central de Box modificado por Myers, Plan Puebla Dos modificado [2], Plan Puebla dos modificado [1] ver compuesto central de Box modificado por Berardo, los diseños de mayor va-

varianza fueron Plan Puebla Dos y Plan Puebla Tres. Los resultados obtenidos son concordantes con los obtenidos por otros investigadores (5,9,11,15,18), es notorio el efecto que sobre la varianza tienen el número y la distribución de los tratamientos, tal efecto se observa claramente en la menor varianza del cuadrado doble modificado por Escobar, diseño este en el que los tratamientos están distribuidos de una manera uniforme sobre todo el espacio factorial; si se comparan la matriz Plan Puebla dos con las dos modificaciones propuestas, se observa que la reducción de la varianza es notoria en ambas modificaciones, las que se caracterizan por el aumento en el número de tratamientos, la misma observación es válida al comparar el compuesto central de Box modificado por Berardo y el compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, la mayor varianza de las matrices Plan Puebla Dos y Plan Puebla Tres se explica por la distribución particular de los tratamientos en el espacio factorial, en estas matrices los tratamientos están restringidos a una franja diagonal de orientación sur oeste noreste, en tanto que las esquinas noroeste y sureste no muestran ubicación de tratamientos en sus áreas, razón esta por la cual se le puede adjudicar a esta característica la presencia de valores altos de varianza para estos dos diseños de tratamientos, al comparar ambos diseños se observa que la varianza fue menor en Plan Puebla Tres, esto se debe a que la distribución de los tratamientos permite que la franja diagonal, sobre la que se distribuyen los tratamientos, ocupe un área mayor del espacio factorial.

#### 4.2.2 Sesgo.

Para efectuar la comparación entre los distintos diseños, se presenta la Tabla de índices de sesgo (Anexo B) para los coeficientes  $\beta_i$  que se obtuvieron al integrar el componente B, puede observarse que los índices de sesgo se dan para el cuadrado de los coeficientes  $\beta_i$  y para los productos cruzados, ello se debe a que se integró el cuadrado del sesgo.

Para obtener el componente B del criterio de Box y Draper, se utilizó el vector parametral  $\vec{\beta}_2$  que se obtuvo a partir del modelo verdadero.

CUADRO 8. Valores de los componentes V y B para los diseños de tratamientos investigados.

DISEÑO DE TRATAMIENTO	V	B
Box-Myers	1145554.354	1425184039000
Box-Berardo	2616110.946	2002279156000
Plan Puebla Dos	26392231.56	1092151380000
Plan Puebla Tres	11019961.24	1276892410000
Cuadrado doble Escobar	417738.304	1816536860000
Box-Berardo-Hernández	975819.312	402104341600
Plan Puebla Modificado 1	2548566.595	923215451300
Plan Puebla Modificado 2	1898869.86	479001984600

Los valores obtenidos indican que los diseños de menor sesgo fueron el compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, Plan Puebla Dos modificado [2] y Plan Puebla Dos Modificado [1]; el grupo de diseños con mayor sesgo estuvo constituido por Plan Puebla Dos, Plan Puebla Tres, compuesto central de Box modificado por Myers, cuadrado doble modificado por Escobar y compuesto Central de Box modificado por Berardo.

Al comparar entre sí únicamente los cinco primeros diseños, o sea los diseños que sirvieron de base a la modificación de Hernández y a las modificaciones que se propusieron en este trabajo, se observa que los diseños que presentaron el menor sesgo fueron Plan Puebla Dos y Plan Puebla Tres, estos diseños a diferencia de los otros tienen orientados sus tratamientos en la franja diagonal que sigue la dirección suroeste a noreste, este resultado comprueba la afirmación de Hernández (11) en el sentido de que los diseños que tienen sus tratamientos ubicados en una franja diagonal orientada en la dirección de las isoclinas, producen menor sesgo al compararse con otras matrices del mismo número de tratamientos que no muestre ninguna orientación.

La comparación de todos los diseños investigados muestra que las modificaciones que corresponden al compuesto central de Box modificado [2] y Plan Puebla dos modificado [1] produjeron el menor sesgo.

Al aumentar los puntos experimentales o tratamientos y restringirse su distribución a una franja diagonal dentro del espacio factoria' se produjo una sensible reducción en el sesgo, esta reducción fué mayor en los diseños compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández y Plan Puebla dos modificado [2], en estos diseños los tratamientos adicionales se ubicaron dentro de la franja diagonal pero más alejados del punto central de modo que produjeron una "mejor" distribución de los tratamientos sobre la franja diagonal; en el diseño Plan Puebla dos modificado [1] los tratamientos adicionales se ubicaron más cercanos al punto central, en este caso se presentó una reducción del sesgo pero de menor magnitud que la obtenida con las otras dos modificaciones.

Los valores correspondientes a los componentes V y B (Tabla 8) comprueban la existencia de una cierta relación inversa entre ambos componentes, es decir que, aquellos diseños buenos para reducir el sesgo producen mayores varianzas.

Es de anotar que las modificaciones hechas al Plan Puebla Dos, disminuyeron tanto el sesgo como la varianza, esto significa que el criterio de Myers (16) según el cual es imposible reducir ambos componentes simultáneamente no puede generalizarse, ya que parece cumplirse únicamente para aquellos diseños que poseen igual número de tratamientos.

## 5. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en la presente investigación, permiten concluir que:

En general los diseños de tratamientos de segundo orden son ineficientes en la estimación de los coeficientes de las variables exponenciales cuando se utilizan para estimar modelos diferentes al modelo cuadrático.

La mayor eficiencia relativa correspondió a aquellos diseños cuya modificación involucraba tanto un aumento en el número de tratamientos como una distribución más uniforme de los mismos sobre el espacio factorial, en este sentido, los diseños más eficientes fueron cuadrado doble modificado por Escobar, compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, Plan Puebla dos modificado [2], compuesto central de Box y Plan Puebla dos modificado [1].

Las modificaciones del Plan Puebla dos mostraron mayor eficiencia que el diseño original, lo que indica que las modificaciones pueden utilizar menor número de repeticiones que el Plan Puebla Dos.

Los diseños que produjeron menor varianza fueron el cuadrado doble modificado por Escobar, compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, compuesto central de Box modificado por Myers, Plan Puebla Dos modificado [2], Plan Puebla modificado [1] y el compuesto central de Box modificado por Berardo.

La varianza se manifiesta como una función del número y distribución de los tratamientos sobre el espacio de exploración.

El menor sesgo estuvo asociado a los diseños, compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, Plan Puebla dos modificado [2] y Plan Puebla dos modificado [1]; es decir que el aumento de los tratamientos y su distribución en una franja diagonal dentro del espacio de exploración pueden explicar la reducción producida sobre el sesgo.

Se comprobó la existencia de una relación inversa entre los componentes varianza y sesgo.

En todos los casos el error medio cuadrático se explicó más por efecto del sesgo que por efecto de la varianza.

Es posible reducir tanto el sesgo como la varianza al aumentar el número de tratamientos y distribuirlos convenientemente sobre el espacio de exploración.

## G. RECOMENDACIONES

Las modificaciones al diseño Plan Puebla Dos pueden utilizarse en las siguientes situaciones:

- a) En etapas tempranas de programas de investigación.
- b) Cuando no se dispone de un fácil acceso al cálculo electrónico.
- c) Cuando el ajuste de la función de superficie de respuesta proporcione óptimos económicos anómalos.

Esta recomendación se basa tanto en el bajo sesgo y varianza asociados a estos diseños como a la distribución particular de los tratamientos, lo que permite efectuar análisis gráficos que representarán bastante fielmente los resultados obtenidos en el campo.

Es recomendable utilizar los diseños compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández y Plan Puebla dos modificado [1] en etapas posteriores o avanzadas de programas de investigación dado los menores valores de sesgo y varianza que les están asociados. Aunque estos dos diseños tienen un número relativamente alto de tratamientos, su utilización se justifica, ya que todos los criterios de selección utilizados en esta investigación, les fueron favorables; siempre que no existan fuertes restricciones económicas para su empleo.

La etapa siguiente a esta evaluación debe comprender trabajos empí-

ricos que permitan detectar otras ventajas y/o desventajas que los diseños seleccionados muestren en investigaciones de campo.

## 7. RESUMEN

Este trabajo tuvo como objetivo la comparación y selección de varios diseños de tratamientos con base en los criterios de sesgo y varianza. Los diseños evaluados fueron: compuesto central de Box modificado por Myers, compuesto central de Box modificado por Berardo, Plan Puebla dos, Plan Puebla Tres, cuadrado doble modificado por Escobar, compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, Plan Puebla dos modificado [1] y Plan Puebla dos modificado [2]. Los dos últimos diseños son modificaciones que se propusieron al Plan Puebla dos con el interés de observar el comportamiento del sesgo y la varianza cuando los tratamientos se aumentan y concentran en una zona particular del espacio factorial.

Como criterio de evaluación se utilizó el propuesto por Box y Draper:

$$J = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R E[\hat{Y}(x) - \eta(x)]^2 dx$$
$$J = \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R \text{Var}[\hat{Y}(x)] dx + \frac{N\Omega}{\sigma^2} \int_R [E\hat{Y}(x) - \eta(x)]^2 dx$$

donde  $J$  es el error medio cuadrático ponderado sobre el espacio factorial  $R$  y normalizado respecto al número de observaciones y el error experimental, el primer término a la derecha del signo igual corresponde

a la varianza de  $Y(x)$  integrada sobre el espacio factorial  $x$ , y el segundo término corresponde al sesgo cuadrado similarmente integrado.

Además se consideró el criterio de eficiencia propuesto por Myers:

$$E = \frac{(\text{Var } b_i \text{ del diseño B})/N_B}{(\text{Var } b_i \text{ del diseño A})/N_A}$$

donde la relación  $N_B/N_A$  proporciona una medida relativa del costo en que se incurre al utilizar el diseño comparado.

Los resultados de la evaluación indicaron que: Los diseños más eficientes fueron cuadrado doble modificado por Escobar, compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, Plan Puebla Dos modificado [2], compuesto central de Box y Plan Puebla Dos modificado [1].

La menor varianza estuvo asociada a los diseños: cuadrado doble modificado por Escobar, compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, compuesto central de Box modificado por Myers, Plan Puebla Dos modificado [2], Plan Puebla dos modificado [1] y el compuesto central de Box modificado por Berardo.

Los diseños que presentaron menor sesgo fueron: compuesto central de

Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández, Plan Puebla dos modificado [2] y Plan Puebla dos modificado [1].

Se comprobó la existencia de cierta relación inversa entre sesgo y varianza.

Tanto el sesgo como la varianza se redujeron al aumentar el número de tratamientos y distribuirlos convenientemente sobre el espacio de exploración.

Se recomienda utilizar las modificaciones al diseño Plan Puebla dos en: a) etapas tempranas de investigación, b) cuando el ajuste de la función de superficie de respuesta proporcione óptimos económicos anómalos, c) cuando no se disponga de fácil acceso al cálculo electrónico.

En etapas avanzadas de investigación pueden utilizarse los diseños: compuesto central de Box modificado por Berardo y aumentado por Hernández y Plan Puebla [1], dado el mayor número de tratamientos de este último, su utilización se recomienda solo en aquellos casos en que no existan serias restricciones de tipo económico.

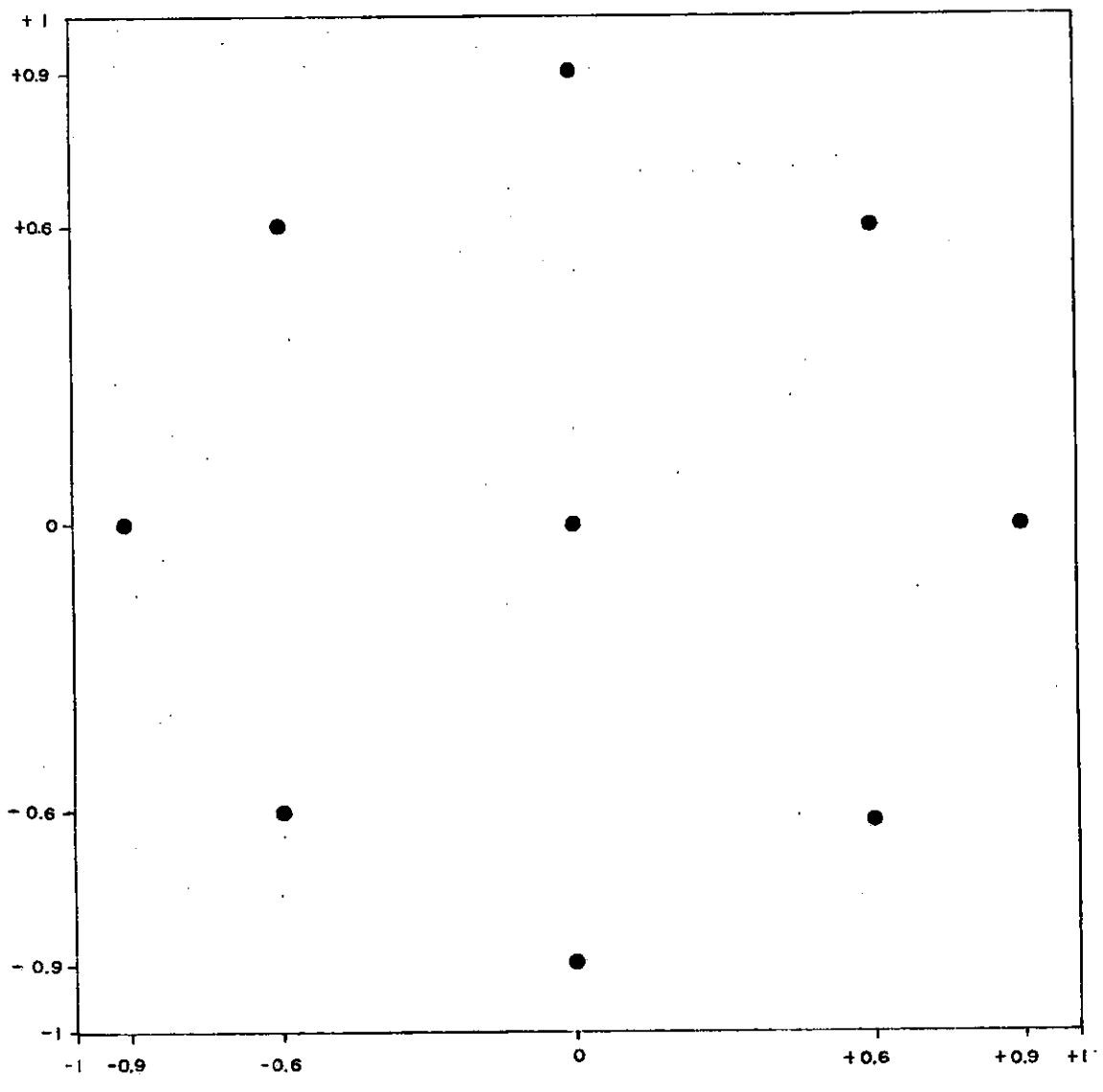
## BIBLIOGRAFIA

1. BERARDO, D.A.; TURRENT, A. y NUÑEZ, R. Estudio empírico de la contribución de algunos modelos y matrices experimentales sobre el sesgo al aproximar superficies de respuesta a dos factores. *Agrociencia Serie C (México)* 7:125-147. 1975.
2. BOX, G.E.P. and DRAPER, N.R. A basis for the selection of a response design. *Jour. of the Amerc. Stat. Assoc.* 54 (287): 622-654. 1959.
3. \_\_\_\_\_ and DRAPER, N.R. Robust designs. *Biometrika (USA)*. 62(2): 347-352. 1975.
4. CADY, F.B. and LAIRD, R.J. Bias error in yield functions as influenced by treatment design and postulated model. *Soil. Sci. Soc. Amer. Proc.* 33: 282-287. 1969.
5. \_\_\_\_\_ and LAIRD, R.J. Treatment design for fertilizer use experimentation. México, CIMMYT, 1973. 30 p. (Research Bulletin, 26).
6. COCHRAN, W.G. y COX, G.M. *Diseños Experimentales*. México. Trillas, 1969. pp. 372-409.
7. DAVID, I.P. and SUKHATME, B.V. On the bias and mean square error of the ratio estimator. *Jour. of the Amer. Stat. Assoc.* 69(346):464-466. 1974.
8. DRAPER, N.R. and SMITH, H. *Applied regression analysis*. New York, Wiley, 1966. 407 p.

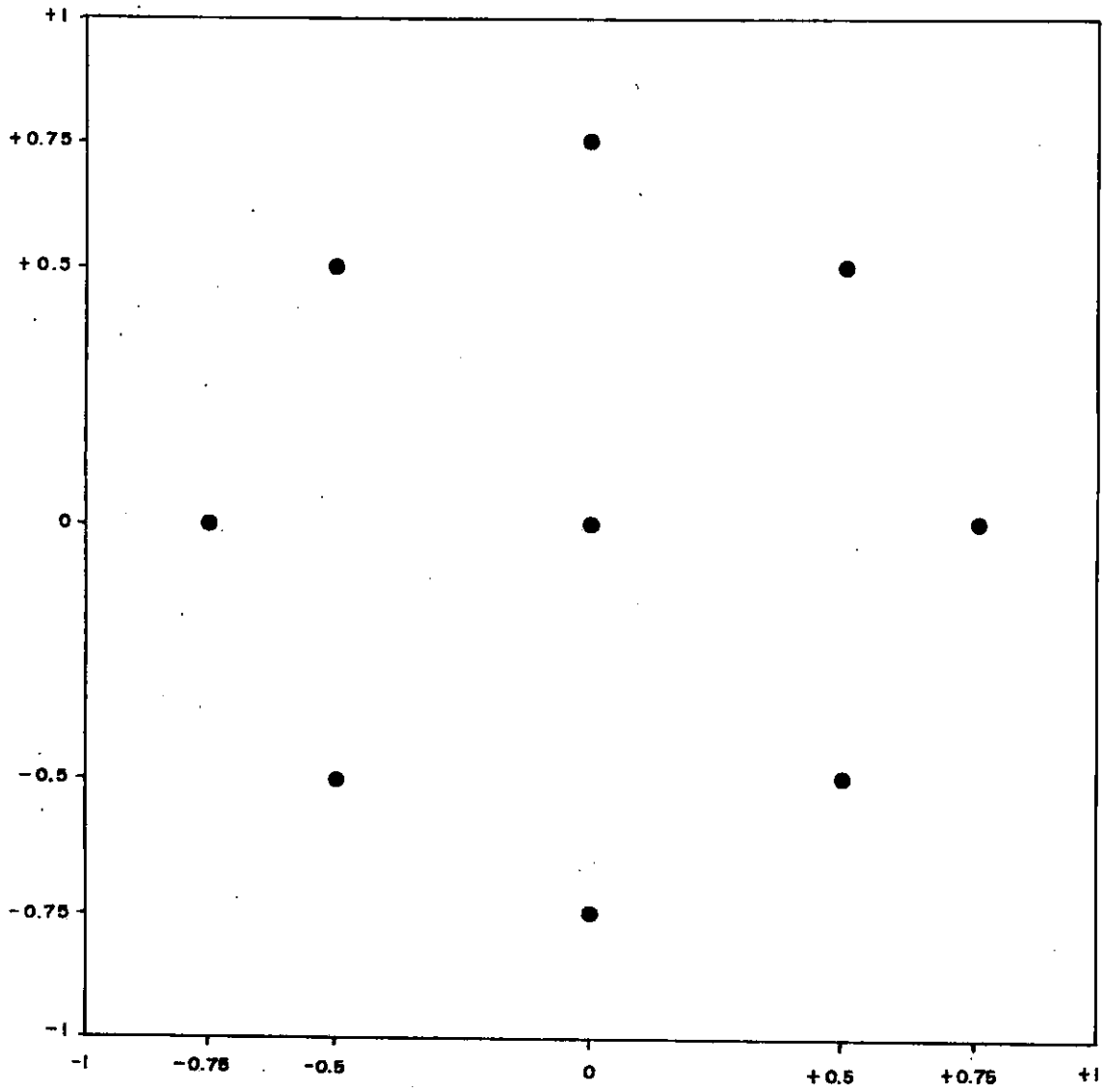
9. ESCOBAR, J.A. y CADY, F.B. Consideraciones sobre la comparación de diseños de tratamientos. *Agrociencia (México)* 1(2):64-75. 1967.
10. HEADY, E.O. and DILLON, J.L. *Agricultural Production Functions*. Ames, Iowa State University, 1961. 667 p.
11. HERNANDEZ S., R. El modelo aproximativo y la matriz experimental como factores que influyen sobre el sesgo, al aproximar superficies de respuesta a dos factores. Tesis M.C. Chapingo, México, Escuela Nacional de Agricultura, Colegio de Postgraduados, 1972. 264 h. (mimeografiado).
12. KARSON, M.J. Design criterion for minimum bias estimation of response surfaces, *Jour. of the Amer. Stat. Assoc.* 65(332):1565-1572.
13. KUPPER, L.L. and MEYDRECH, E.F. Experimental design considerations based on a new approach to mean square error estimation of response surfaces. *Jour. of the Amer. Stat. Assoc.* 69(346): 461-463. 1974.
14. MARTINEZ G., A. Aspectos económicos del diseño y análisis de experimentos. Chapingo, México. Escuela Nacional de Agricultura, Colegio de Postgraduados, 1971. 103 p.
15. MARTINEZ W., O. Efectos del sesgo y la varianza en la elección de una matriz (diseño) de tratamientos en dos variables. Tesis M.C. Chapingo, México, Escuela Nacional de Agricultura, Colegio de Postgraduados, 1974. 66 p.

16. MYERS, R.H. Response surface methodology. Boston, Allyn and Bacon, 1971. 237 p.
17. TISDALE, S.L. y NELSON, W.C. Fertilidad de suelos y fertilizantes. Barcelona, Montaner y Simon, 1970. pp.23-26.
18. TURRENT F., A y LAIRD, R.J. Matrices Plan Puebla; escritos sobre la metodología de la investigación en productividad de suelos. Chapingo, México, Escuela Nacional de Agricultura, Colegio de Postgraduados, 1975. 92 p.
19. URRICH, K. La función de producción y su aplicación en agricultura. In: Montero, E. y Pérez, V. eds. Investigación económica y experimentación agrícola. Montevideo, IICA, 1967. 303 p.
20. WONNACOTT, R.J. and WONNACOT, T.H. Econometrics. New York, Wiley, 1970. 445 p.

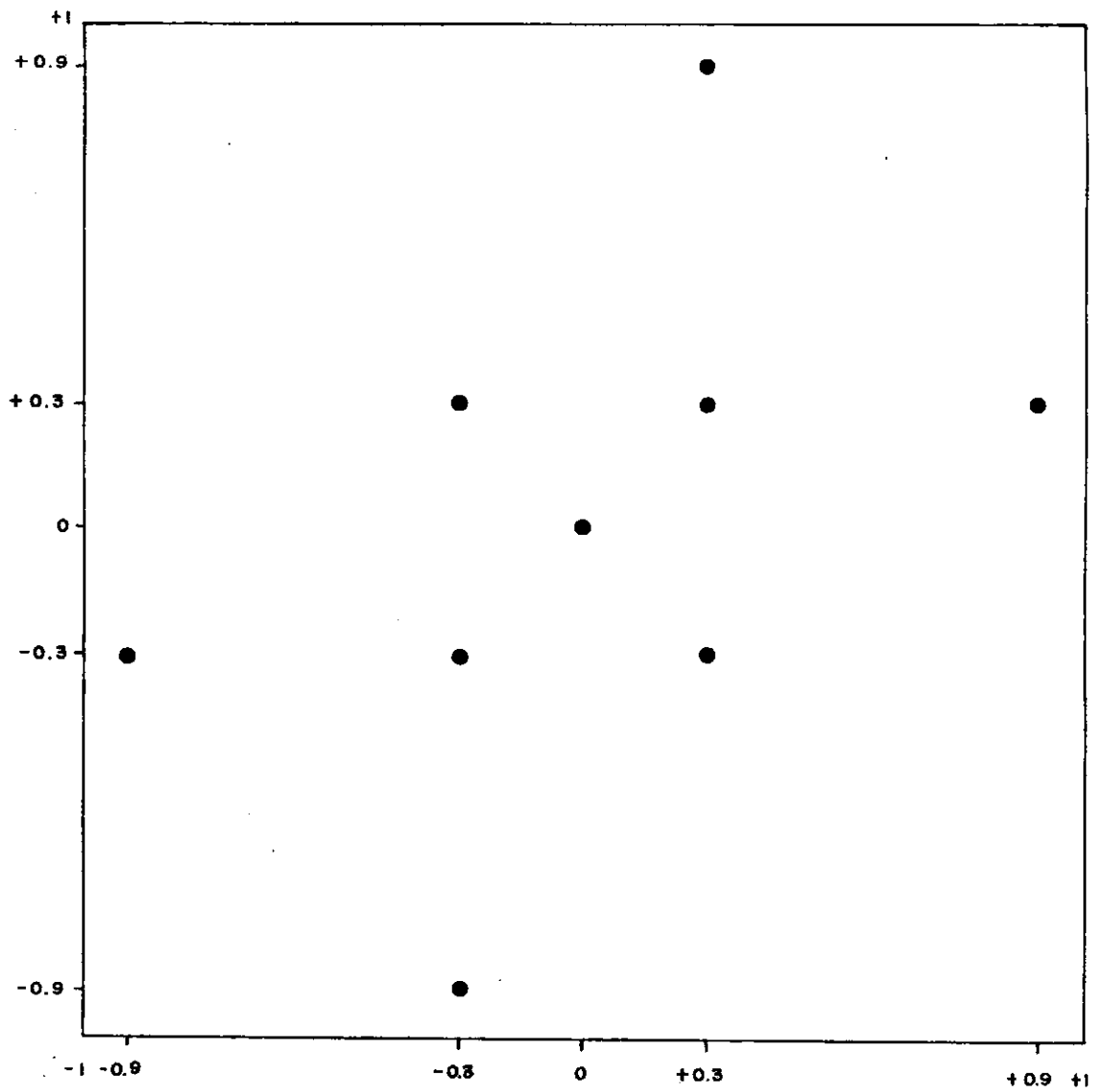
**ANEXO A**



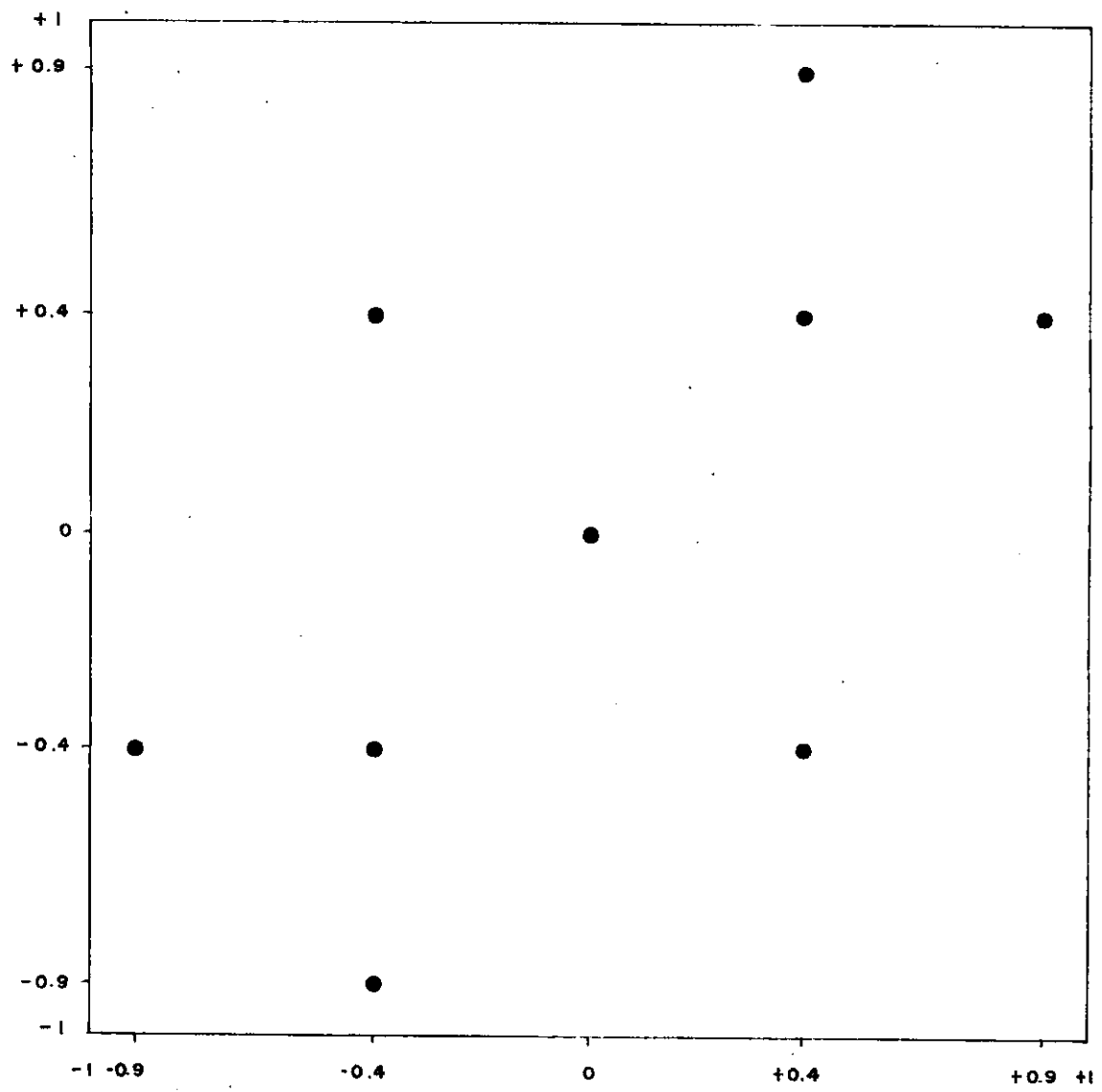
1.- COMPUESTO CENTRAL DE BOX MODIFICADO POR MYERS.



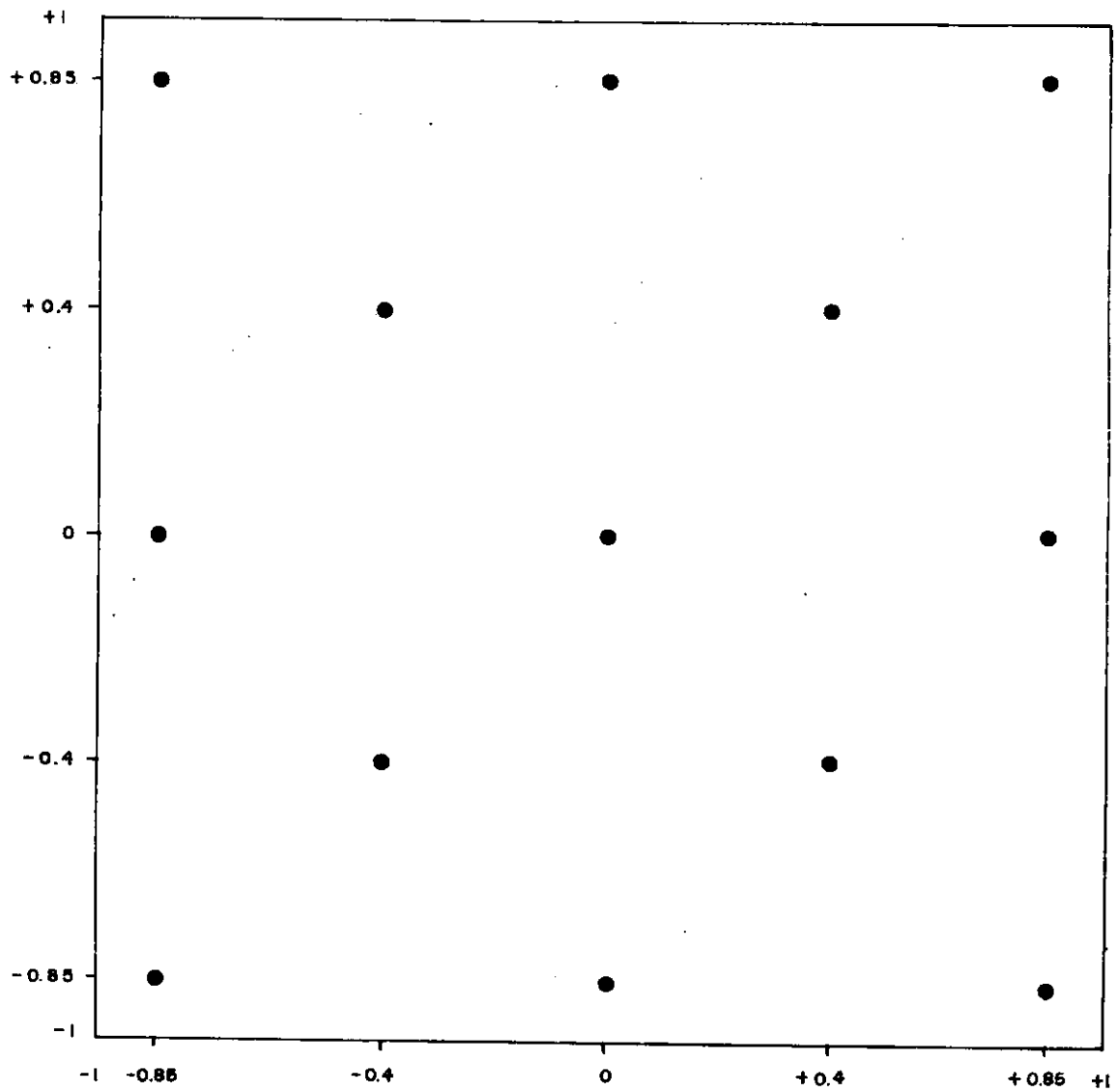
2.- COMPUESTO CENTRAL DE BOX MODIFICADO POR BERARDO.



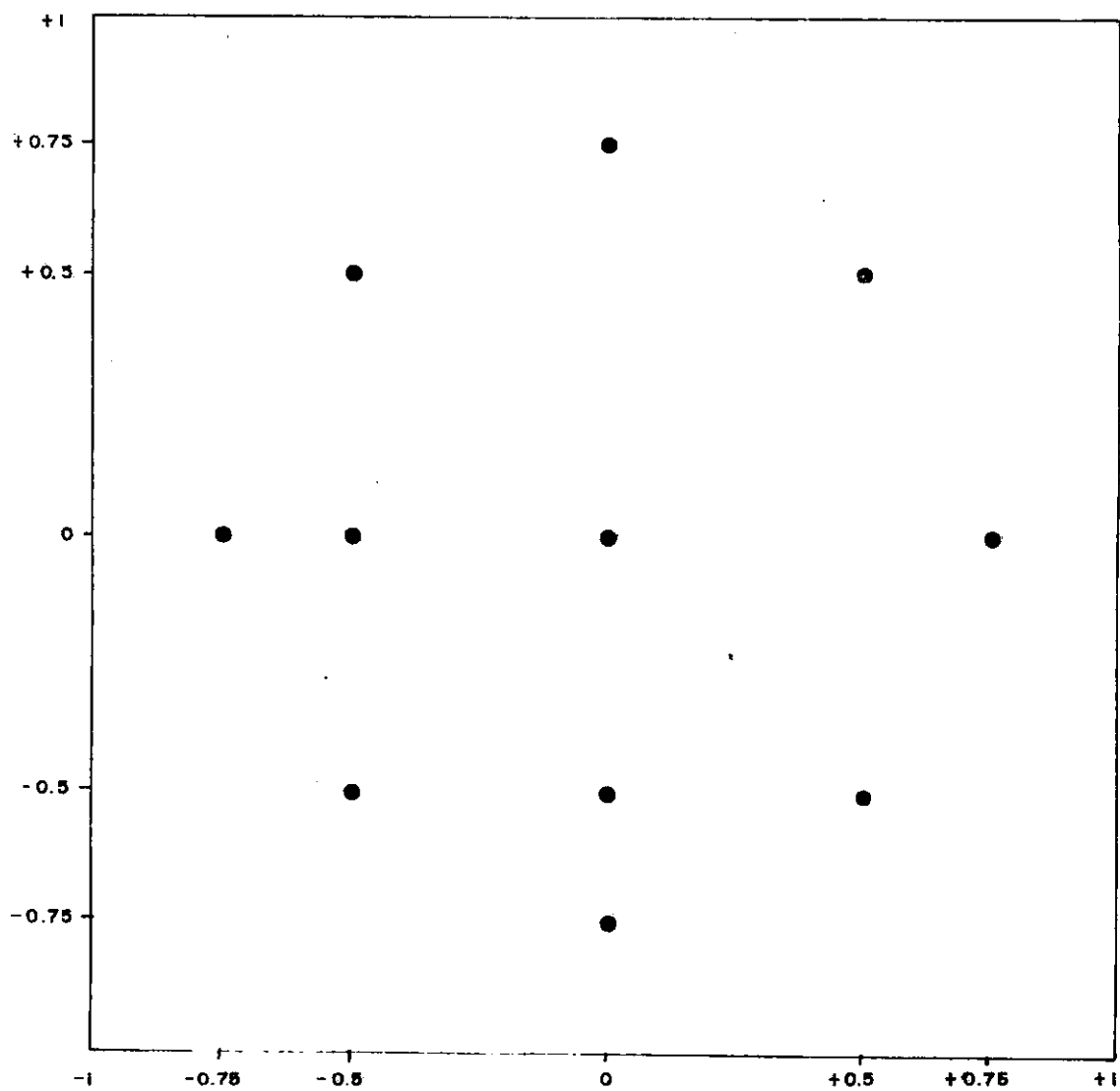
3.- PLAN PUEBLA DOS.



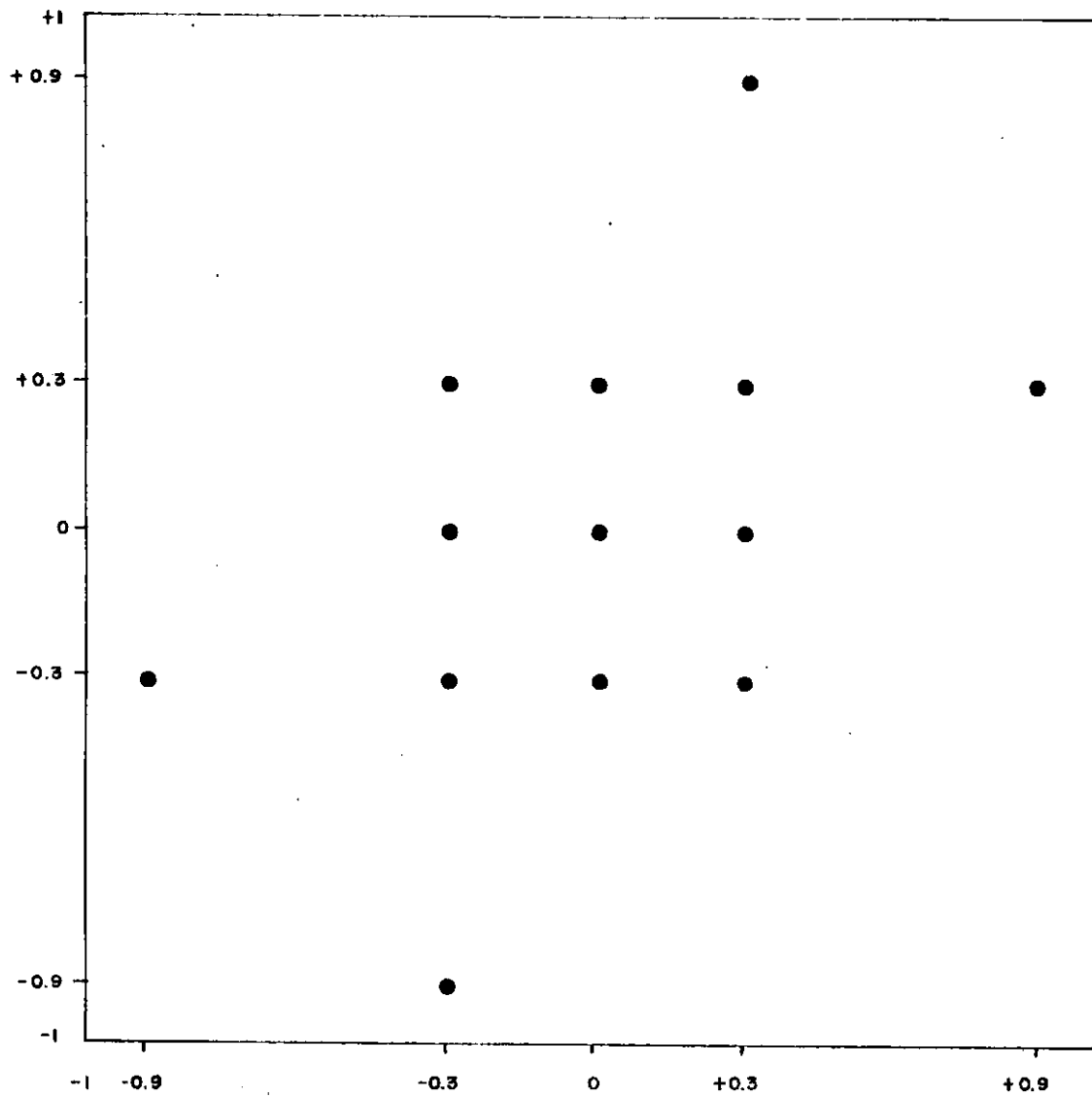
4- PLAN PUEBLA TRES.



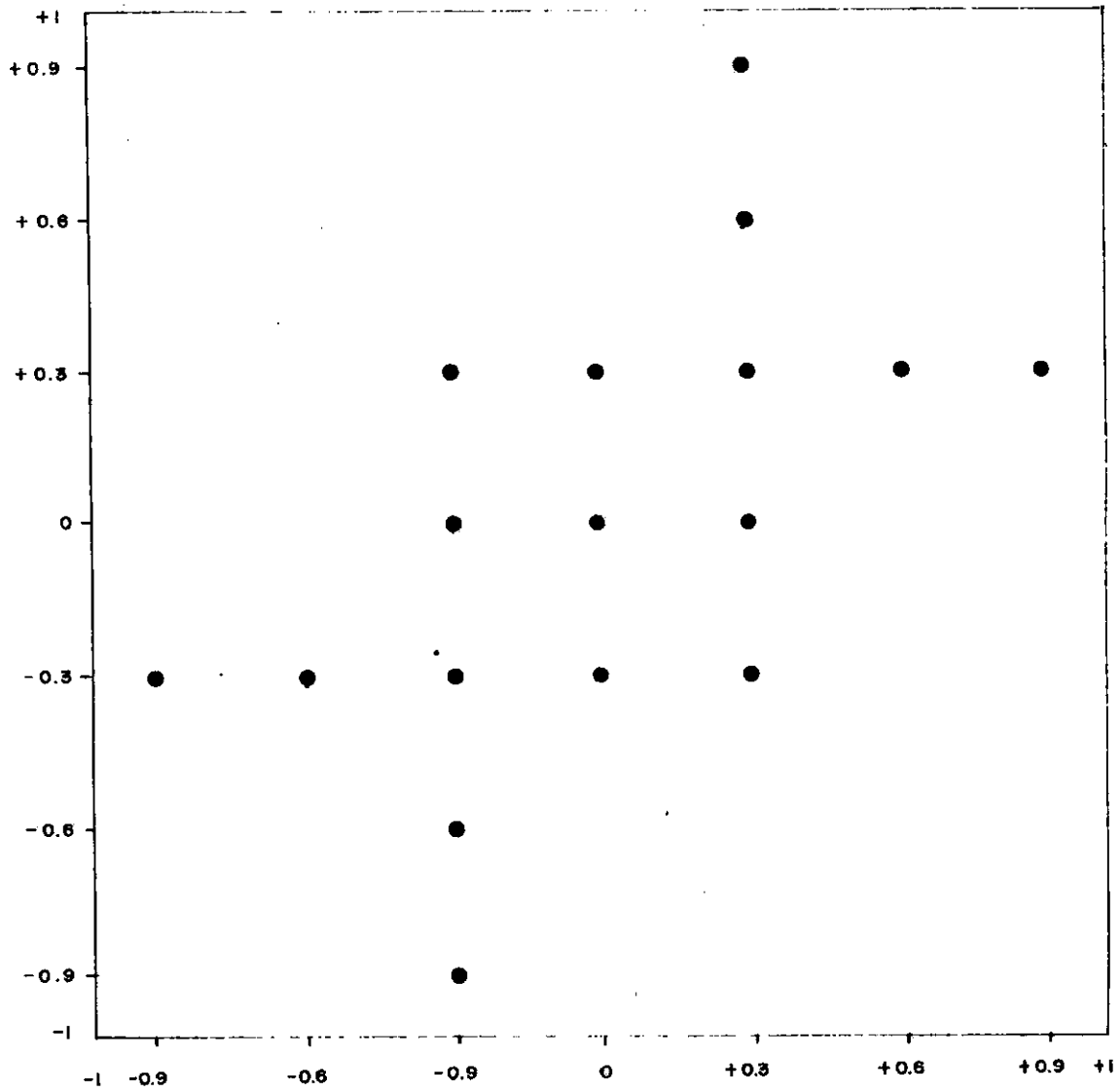
5.-CUADRADO DOBLE MODIFICADO POR ESCOBAR.



6.— COMPUESTO CENTRAL DE BOX MODIFICADO POR BERARDO Y AUMENTADO POR HERNANDEZ.



7- PLAN PUEBLA DOS MODIFICADO (1).



8.- PLAN PUEBLA DOS MODIFICADO (2).

ANEXO B

INDICES DE SESGO PARA LOS DISEÑOS DE TRATAMIENTOS EVALUADOS

Parámetros	Box-Myers	Box-Berardo	Plan Puebla Dos	Plan Puebla Tres	Cuadrado Doble- Escobar	Box-Berardo- Hernandez	Plan Puebla Dos Modificado [1]	Plan Puebla Dos Modificado [2]
B <sub>1</sub> <sup>2</sup>	-96.019531	-96.019531	-96.019531	-96.019531	-96.019531	-96.019531	-96.019531	-96.019531
B <sub>2</sub> <sup>2</sup>	64.0	64.0	64.0	64.0	64.0	64.0	64.0	64.0
B <sub>11</sub> <sup>2</sup>	0.19826525E 14	0.27792498E 14	0.15002588E 14	0.17819350 E 14	0.25562160E 14	0.47070944E 13	0.12561407E 14	5.61345911E 13
B <sub>22</sub> <sup>2</sup>	-0.38957065E 14	-0.30137280E 13	-0.39969570E 14	-0.39899407E 14	-0.40069227E 14	-0.62975199E 13	-0.39774367E 14	-0.38347683E 14
B <sub>12</sub> <sup>2</sup>	-1048576.0	-1048576.0	-1048576.0	-1048576.0	-1048576.0	-1048576.0	-1048576.0	-1048576.0
B <sub>112</sub>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B <sub>111</sub>	-60928.0	64.0	57344.0	-8160.0	-57280.0	0.0	-90112.0	-81920.0
B <sub>122</sub>	131040.0	-32.0	126452.31	79337.663	131040.0	4065.375	58874.75	119274.5
B <sub>1122</sub>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B <sub>211</sub>	64.0	-16415.0	0.0	-32.0	8160.0	1632.0	-512.0	8192.0
B <sub>222</sub>	-0.59352602E 09	0.67704955E 10	0.10817098E 10	0.18397588E 10	-0.10470758E 09	0.39436077E 10	0.10710039E 10	-0.65515453E 09
B <sub>1122</sub>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B <sub>11222</sub>	0.43421598E 13	0.38660190E 13	0.69503707E 13	0.34239739E 13	0.46880116E 12	0.14669345E 14	0.81150670E 13	5.1134399E 14
B <sub>11122</sub>	-209664.0	-2095616.0	-4194816.0	-2620928.0	0.0	-2097664.0	-2097152.0	2765516.0
B <sub>2212</sub>	0.0	512.0	-0.67182694E 09	-0.13492818E 10	0.0	-0.21519333E 12	-0.37576038E 09	-0.77387745E 10