

ESTADISTICA

ANALISIS CANONICO DE UNA SUPERFICIE DE RESPUESTA, INGRESO NETO

Bernardo Chaves Córdoba*

RESUMEN

En algunos trabajos de investigación el análisis de una superficie de respuesta se reduce solamente a encontrar, el máximo, el mínimo o el óptimo económico. Sin embargo, existen otras técnicas para explorar la superficie y encontrar puntos donde las condiciones de operación son similares al óptimo o al máximo. Si el punto de interés (máximo, óptimo o punto de silla) está fuera de la región de exploración, estas técnicas permiten trasladarse a dicha región y encontrar puntos donde se maximiza la respuesta. La exploración de la región de interés se logra a través del análisis canónico o rotación de los ejes, de la superficie de respuesta. El objetivo de este estudio fue describir y aplicar el análisis canónico en el caso de un máximo, un punto de silla y de un óptimo económico.

Teóricamente se encontró, en el análisis del ingreso neto con y sin restricciones de capital, que la rotación de los ejes fue idéntica a la efectuada en el análisis de la variable rendimiento, esto implica que la rotación depende sólo de la matriz \hat{B} y que cualquier combinación lineal de la ecuación de regresión del rendimiento, no cambia su dirección sino su origen.

Se ilustraron dos casos, uno considerando un máximo y otro, un punto de silla fuera de la región de exploración; en cada caso se encontraron puntos donde el ingreso neto fue máximo.

SUMMARY

Canonical Analysis of a net profit response surface

In some of the research work done, analysis of a response surface is reduced to find, the maximum, minimum or the economic optimum point. However, there are other techniques to explore the surface to find other kind of points, where the conditions of operation are similar to the optimum or to the maximum.

If the point of interest (maximum, minimum, optimum or saddle point) is out of the region of exploration, these techniques allow to reach such region and find points where the response reach the maximum point. The exploration of the region of interest was done by the canonical analysis, or rotation of the axes. The objective of this study was to describe and to apply the canonical analysis in the case of a maximum, a saddle point and an economic optimum.

Theoretically, the analysis of net profit with and without restriction over the capital, showed that the axes of rotation were identical to the canonical analysis of the yield variable. This implies that rotation depends only on the matrix \hat{B} and of any linear combination of the regression equation of the yield this changes its origin but its direction does not change.

Two cases were illustrated, first considering the maximum point and second, a saddle point out of the region of exploration. In each case, the points where the net profit reached the maximum, were found.

* Estadístico M.S., Sección de Estadística y Biometría del Instituto Colombiano Agropecuario, ICA. Apartado Aéreo 151123 Eldorado, Bogotá, Colombia.

INTRODUCCION

En algunos trabajos de investigación, tanto en el área agronómica como en el área pecuaria, se ha incrementado notablemente el uso de arreglos factoriales, de factoriales incompletos y/o de diseños de tratamientos para estudiar superficies de respuesta. A través de ellos se pretende encontrar una forma funcional que permita obtener máximos, mínimos y/o óptimos económicos de la respuesta de interés, como función de una combinación de niveles de los factores.

Los diseños de tratamientos más utilizados para ajustar superficies de respuesta son los factoriales, con más de dos niveles cuantitativos y los diseños compuestos. El número de tratamientos en los diseños compuestos es $2^k + 2k + n_0$, k es el número de factores y n_0 es el número de repeticiones del punto central (2, 3, 4, 5).

Los diseños de tratamientos anteriormente mencionados, son específicos para ajustar modelos al menos de segundo grado (1, 5), o modelos de potencias fraccionadas, por ejemplo el modelo de la raíz cuadrada. Obtenida la ecuación de regresión que representa adecuadamente la variable de interés, se puede estimar el punto donde se encuentra el máximo, mínimo, óptimo o punto de silla (5).

Existen otras técnicas, de poco uso o poco conocidas, que permiten hacer una exploración de la superficie de respuesta estudiada; una de ellas es el análisis canónico, el cual consiste en un traslado al punto estacionario y una rotación de las coordenadas o insumos a ejes nuevos, que representan los niveles de los factores aplicados (3, 5). El propósito de esta transformación es localizarse en el punto crítico y desplazarse en cualquier dirección, para analizar qué factor o factores hacen que la respuesta varíe con mayor o menor rapidez.

Este estudio tiene como objetivo describir y aplicar el análisis canónico en el caso de: un máximo, un punto de silla y del óptimo económico. Se pretende que los resultados del presente sean de utilidad en el análisis de cualquier superficie de respuesta.

MATERIALES Y METODOS

Análisis Canónico

Suponga que se ha estimado el siguiente modelo:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + X\hat{b} + X' \hat{B} X \quad \dots [1]$$

donde \hat{y} es la estimación de la variable dependiente, \hat{b}_0 es la estimación del intercepto:

$X' = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ un vector de k variables independientes, $\hat{b}' = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_k)$ un vector de k coeficientes de regresión estimados correspondientes a las variables independientes y,

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \frac{\hat{b}_{12}}{2} & \dots & \frac{\hat{b}_{1k}}{2} \\ \frac{\hat{b}_{21}}{2} & \hat{b}_{22} & \dots & \frac{\hat{b}_{2k}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{b}_{k1}}{2} & \frac{\hat{b}_{k2}}{2} & \dots & \hat{b}_{kk} \end{bmatrix}$$

una matriz simétrica en cuya diagonal principal tiene las estimaciones de los coeficientes de regresión que acompañan cada variable independiente al cuadrado y fuera de ella, un medio de las estimaciones de los coeficientes de regresión de los productos cruzados. Cuando sólo hay dos variables independientes, es decir $k = 2$, el modelo ajustado es:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_1 + \hat{b}_2 X_2 + \hat{b}_{11} X_1^2 + \hat{b}_{22} X_2^2 + \hat{b}_{12} X_1 X_2$$

El análisis canónico consiste de una traslación del punto $X' = 0$ al punto estacionario X_0 y luego una rotación de los ejes originales en nuevos ejes. La estimación del punto estacionario se encuentra derivando [1] con respecto a X, igualando a cero y despejando a X. Así:

$$\hat{X}_0 = - \frac{1}{2} \hat{B}^{-1} \hat{b}$$

El punto estacionario \hat{X}_0 puede ser máximo, mínimo o punto de silla. La función de respuesta en el punto \hat{X}_0 es:

$$\hat{y}_0 = \hat{b}_0 + \hat{X}'_0 \hat{b} + \hat{X}'_0 \hat{B} \hat{X}_0,$$

reemplazando \hat{X}_0 :

$$\hat{y}_0 = \hat{b}_0 - \frac{1}{2} \hat{b}' \hat{B}^{-1} \hat{b} + \frac{1}{4} \hat{b}' \hat{B}^{-1} \hat{b}$$

como $\hat{X}_0 = - \frac{1}{2} \hat{B}^{-1} \hat{b}$, entonces

$$\hat{y}_0 = \hat{b}_0 + \frac{1}{2} \hat{X}'_0 \hat{b}$$

Para trasladarse al punto estacionario, se hace $Z = X - \hat{X}_0$ y se reemplaza en [1].

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{b}_0 + (Z' + \hat{X}'_0) \hat{b} + (Z' + \hat{X}'_0) \hat{B} (Z + \hat{X}_0) \\ &= \hat{y}_0 + Z' (\hat{b} + 2\hat{B} \hat{X}_0) + Z' \hat{B} Z \end{aligned}$$

reemplazando \hat{X}_0 :

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + Z' \hat{B} Z \quad \dots [2]$$

Para obtener la forma canónica de la superficie de respuesta, la forma cuadrática $Z' \hat{B} Z$ se debe reducir a una expresión que contenga solamente términos cuadráticos en los elementos del vector $w' = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, lo anterior se logra mediante la siguiente transformación: $Z = MW$, de modo que:

$$Z' B Z = W' M' B M W - \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_k w_k^2,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son las raíces características de la matriz \hat{B} , M es una matriz ortogonal de orden k , compuesta de los vectores característicos asociados a las raíces características de \hat{B} y w_1, w_2, \dots, w_k son las nuevas variables. La ecuación [2] se transforma en la siguiente:

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_k w_k^2,$$

y se llama la forma canónica de la superficie de respuesta. La relación entre las variables w_1, w_2, \dots, w_k y las variables X_1, X_2, \dots, X_k se establece en la siguiente forma:

$$W = M'Z$$

El signo y la magnitud de los λ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) determina la naturaleza del punto estacionario, si $\lambda_i < 0$ para todo i , entonces en el punto estacionario se encuentra un máximo, si $\lambda_i > 0$ para todo i , en este caso en el punto estacionario se halla un mínimo y si los λ_i difieren de signo, de este modo el punto estacionario es un punto de ensilladura. Cuando $k = 2$, dos variables independientes, λ_1 y λ_2 son menores que cero y $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, un desplazamiento en el eje w_1 , en cualquier dirección ocasiona un cambio más pequeño en la respuesta que el causado con igual desplazamiento en el eje w_2 . Una situación similar se puede encontrar si el punto estacionario es un mínimo o punto de silla (5).

Si se encuentra que en el punto estacionario, siempre y cuando esté en el espacio de exploración, hay un máximo o un mínimo y algún λ_i está cerca a cero, dicho punto no es el único que maximiza o minimiza la respuesta, pues existen muchos puntos con posibles condiciones de operación a lo largo del eje w , los cuales producen respuestas muy cercanas al máximo o al mínimo; a esta situación se le llama sistema estacionario de cresta. En caso de que el punto estacionario esté fuera de la región de exploración y se presente la situación anterior, se le denomina sistema de cresta ascendente (5).

Óptimo Económico

Se calcula el óptimo económico sin tener limitaciones sobre el capital y para capital limitado (7).

— Capital ilimitado. Se supone que se ha ajustado la superficie de respuesta y a partir de ella se obtiene la función de ingreso neto (IN).

$$\hat{IN} = P_y \hat{Y} - X' P_x = CF \quad \dots [3]$$

P_y es el precio del producto, $P_x = (P_{x1}, P_{x2}, \dots, P_{xk})$ es un vector de precios de los k insumos, $X' = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ es un vector de las cantidades aplicadas de los k insumos y CF es el costo fijo.

Para encontrar el óptimo económico, basta derivar la ecuación [3] con respecto a X , igualar a cero y encontrar la combinación de las cantidades de los k insumos que hace óptima la producción y se obtiene:

$$\hat{X}_{cf} = \frac{1}{2} \hat{B}^{-1} (r - \hat{b}),$$

donde:

$$r = \left(\frac{P_{x1}}{P_y}, \frac{P_{x2}}{P_y}, \dots, \frac{P_{xk}}{P_y} \right)$$

— Capital limitado. El procedimiento para encontrar el óptimo económico es similar al caso anterior. Se define una función de ingreso neto de la siguiente manera:

$$\hat{IN} = P_y \hat{Y} - X' P_x - CF + \lambda (X' P_x - C), \quad \dots [4]$$

λ es un multiplicador de Lagrange, utilizado en los casos de maximización con restricciones, C es el monto del capital limitado a invertir en k insumos (7) y los términos restantes de la ecuación [4], tienen el mismo significado que en la ecuación [3].

Para encontrar el máximo, se deriva la ecuación [4] con respecto a X y λ , se iguala a cero cada una de las $k + 1$ ecuaciones y se encuentra el máximo X_{cf}^* :

$$\hat{X}_{cf}^* = \frac{1}{2} \hat{B}^{-1} \left[r \left(\frac{2C + \hat{b}' \hat{B}^{-1} P_x}{r' \hat{B}^{-1} P_x} \right) - \hat{b} \right]$$

RESULTADOS Y DISCUSION

Resultados Estadísticos

Para realizar el análisis canónico a partir de los óptimos económicos encontrados, el primer paso es trasladar los ejes del origen $(0, \dots, 0)$ a los puntos \hat{X}_{op} y \hat{X}_{cf}^* .

— Capital ilimitado. Para hacer el traslado de origen del sistema coordenado, se reemplaza \hat{X}_{op} en la ecuación [1].

$$\hat{y}_{cf} = \hat{b}_0 + X'_{cf} \hat{b} + \hat{X}'_{cf} \hat{B} \hat{X}_{cf},$$

$$\hat{X}_{cf} = \frac{1}{2} \hat{B}^{-1} (r - \hat{b})$$

así:

$$\widehat{y}_{op} = \widehat{b}_0 + \left[\frac{1}{2} \widehat{E}' (r - \widehat{b}) \right]' \widehat{b} + \left[\frac{1}{2} \widehat{E}' (r - \widehat{b}) \right]' \widehat{E} \left[\frac{1}{2} \widehat{E}^{-1} (r - \widehat{b}) \right]$$

$$\widehat{y}_{op} = \widehat{y}_0 + \frac{1}{4} r' \widehat{E}^{-1} r \quad \dots [5]$$

— Capital limitado. El procedimiento para trasladar el origen, se realiza en forma similar al anterior:

$$\widehat{y}_{op}^* = \widehat{b}_0 + \widehat{X}_{cp}^* \widehat{b} + \widehat{X}_{cp}^* \widehat{E} \widehat{X}_{cp}^*$$

$$\widehat{X}_{op}^* = \frac{1}{2} \widehat{E}^{-1} \left[r \left(\frac{2C + \widehat{b}' \widehat{E}^{-1} P_x}{r' \widehat{E}^{-1} P_x} \right) - \widehat{b} \right]$$

así:

$$\widehat{y}_{cp}^* = \widehat{b}_0 + \frac{1}{2} \left[\widehat{E}^{-1} \left\{ r \left(\frac{2C + \widehat{b}' \widehat{E}^{-1} P_x}{r' \widehat{E}^{-1} P_x} \right) - \widehat{b} \right\} \right]' \widehat{b} + \frac{1}{4} \widehat{E}^{-1} \left[\left\{ r \left(\frac{2C + \widehat{b}' \widehat{E}^{-1} P_x}{r' \widehat{E}^{-1} P_x} \right) - \widehat{b} \right\} \right]' \widehat{E} \left[\widehat{E}^{-1} \left\{ r \left(\frac{2C + \widehat{b}' \widehat{E}^{-1} P_x}{r' \widehat{E}^{-1} P_x} \right) - \widehat{b} \right\} \right]$$

$$\widehat{y}_{op}^* = \widehat{y}_0 + \frac{1}{4} \left[\frac{2C + \widehat{b}' \widehat{E}^{-1} P_x}{r' \widehat{E}^{-1} P_x} \right]^2 r' \widehat{E}^{-1} r \quad \dots [6]$$

El siguiente paso es la rotación de los ejes, expresados en nuevas variables, los cuales corresponden a los ejes principales del sistema de contornos (Figura 1). Esta transformación sólo se presenta en el caso de capital ilimitado. Sea $Z_1 = X - X_{cp}$; la ecuación [1] se puede escribir de la siguiente forma:

$$\widehat{y} = \widehat{b}_0 + (Z_1' + \widehat{X}_{cp}') \widehat{b} + (Z_1' + \widehat{X}_{cp}') \widehat{E} (Z_1 + \widehat{X}_{cp}),$$

reemplazando X_{op} , se tiene:

$$\widehat{y} = \widehat{y}_{op} + Z_1' \widehat{b} + 2Z_1' \widehat{E} \left[\frac{1}{2} \widehat{E}^{-1} (r - \widehat{b}) \right] + Z_1' \widehat{E} Z_1$$

$$\therefore \widehat{y} = \widehat{y}_{op} - Z_1' r + Z_1' \widehat{E} Z_1 \quad \dots [7]$$

Se puede expresar a Z_1 a partir de Z , de la siguiente forma:

$$Z_1 = Z - \frac{1}{2} \widehat{E}^{-1} r$$

ahora se reemplaza esta expresión en [7] y se obtiene:

$$\widehat{y} = \widehat{y}_{op} + (Z - \frac{1}{2} \widehat{E}^{-1} r)' r + (Z - \frac{1}{2} \widehat{E}^{-1} r)' \widehat{E} (Z - \frac{1}{2} \widehat{E}^{-1} r)$$

$$\widehat{y} = \widehat{y}_{cp} - \frac{1}{4} r' \widehat{E}^{-1} r + Z' \widehat{E} Z \quad \dots [8]$$

reemplazando $\widehat{y}_{cp} = \widehat{y}_0 + \frac{1}{4} r' \widehat{E} r$ en [8], se llega a la siguiente expresión:

$$\widehat{y} = \widehat{y}_0 + Z' \widehat{E} Z \quad \dots [9]$$

la cual es igual a la encontrada en el caso del máximo físico, ecuación [2]. El resultado anterior, indica que la rotación de los ejes depende únicamente de la matriz E , lo cual implica que pueden establecerse combinaciones lineales de las variables independientes sin causar ningún efecto sobre la dirección de la rotación. Obviamente, el resultado de la rotación en el caso de capital limitado es el mismo.

Desde el punto de vista económico, la variable que interesa en este caso, es el ingreso neto, por tanto, se presentan algunos resultados pertinentes al análisis canónico de dicha variable.

Ingreso Neto

El valor del ingreso neto en el óptimo económico estimado para el capital ilimitado y capital limitado, respectivamente, es:

$$\widehat{IN}_{cp} = P_y \widehat{Y}_{cp} - \widehat{X}_{op}' P_x - CF,$$

$$\widehat{IN}_{cp}^* = P_y \widehat{Y}_{cp}^* - \widehat{X}_{op}^* P_x - CF.$$

Para conseguir el traslado y la rotación de los ejes, se usa la misma metodología propuesta en materiales y métodos. Primero se hace para capital ilimitado y luego para capital limitado.

La ecuación del ingreso neto es:

$$\widehat{IN} = \widehat{y} P_y - X' P_x - CF$$

reemplazando \widehat{y} se obtiene:

$$\widehat{IN} = \widehat{b}_0 P_y + X'(\widehat{b} - r) P_y + X' \widehat{E} X P_y - CF \quad \dots [10]$$

El traslado de los ejes del origen al punto \widehat{X}_{cp} , se realiza de la siguiente forma: $Z = \sqrt{P_y} (X - \widehat{X}_{cp})$, entonces la ecuación [10] se puede escribir:

$$\widehat{IN} = \widehat{b}_0 P_y + P_y \left(\frac{Z'}{P_y^{1/2}} + \widehat{X}'_{cp} \right) (\widehat{b} - r) + \left(\frac{Z'}{P_y^{1/2}} + \widehat{X}'_{cp} \right) \widehat{E} \left(\frac{Z}{P_y^{1/2}} + \widehat{X}_{cp} \right) P_y - CF$$

de donde:

$$\widehat{IN} = \widehat{b}_0 P_y - CF + P_y \left\{ \frac{Z'}{P_y^{1/2}} (\widehat{b} - r) + \widehat{X}'_{cp} (\widehat{b} - r) + \frac{1}{P_y} Z' \widehat{E} Z + 2 \frac{Z'}{P_y^{1/2}} \widehat{E} \widehat{X}_{cp} + \widehat{X}'_{cp} \widehat{E} \widehat{X}_{cp} \right\}$$

reemplazando X_{cp} , se obtiene:

$$\widehat{IN} = \widehat{b}_0 P_y - CF - \frac{1}{2} \widehat{X}'_{cp} (r - \widehat{b}) P_y + Z' \widehat{E} Z \quad \dots [11]$$

Los tres primeros términos de la ecuación [11] no dependen de Z y son valores conocidos, de ahí que la rotación de los ejes se realice en la misma dirección que la resultante en las ecuaciones [2] y [9]; la diferencia entre ellas sólo reside en los términos constantes.

El resultado anterior indica que una función lineal de la ecuación [1], no cambia la rotación.

En el caso del capital limitado la ecuación del ingreso neto es:

$$\widehat{IN} = \widehat{y} P_y - X' P_x + \lambda (X' P_x - C) - CF.$$

reemplazando \widehat{y} se tiene que:

$$\widehat{IN} = \widehat{b}_0 P_y + X' (\widehat{b} - r (1 - \lambda)) P_y - X' \widehat{E} X P_y - CF - \lambda C \quad \dots [12]$$

Mediante la transformación $Z = \sqrt{P_y} (X - \widehat{X}_{cp}^*)$ se realiza la rotación, reemplazando Z en la ecuación anterior así:

$$\widehat{IN} = \widehat{b}_0 P_y + \left(\frac{Z}{P_y^{1/2}} + \widehat{X}_{cp}^* \right)' (\widehat{b} - r (1 - \lambda)) P_y + \left(\frac{Z}{P_y^{1/2}} + \widehat{X}_{cp}^* \right)' \widehat{E} \left(\frac{Z}{P_y^{1/2}} + \widehat{X}_{cp}^* \right) P_y - CF - \lambda C$$

reemplazando \widehat{X}_{cp}^* , se obtiene:

$$\widehat{IN} = \widehat{b}_0 P_y - \frac{1}{2} \widehat{X}_{cp}^* (r (1 - \lambda) - \widehat{b}) P_y - CF - \lambda C + Z' \widehat{E} Z \quad \dots [13]$$

de modo que la rotación es idéntica a los casos anteriores, cambiando solamente el término constante.

Ilustración Numérica

Punto máximo. Se realizó un análisis de regresión múltiple con el propósito de estimar una superficie de respuesta del rendimiento de arroz variedad Oryzica, a la cual se le aplicaron cuatro cantidades de superfosfato triple combinados con cinco de roca fosfórica del Huila. El modelo ajustado fue el siguiente:

$$\widehat{y} = 3488.1432 + 33.4442SFT + 6.2898RFH - 0.2276SFT^2 - 0.0091RFH^2 - 0.0585SFT * RFH \quad \dots [14]$$

todos los coeficientes de regresión fueron altamente significativos; el ajuste presentó coeficiente de determinación $R^2 = 77.96\%$ y un coeficiente de variación $CV = 4.70492\%$.

Análisis canónico para el rendimiento estimado. A partir del ajuste del modelo propuesto, se obtuvo la siguiente información:

$$\widehat{b}_0 = 3488.1432 \quad \widehat{b}' = (33.4442, 6.2898)$$

$$\widehat{E} = \begin{bmatrix} -0.2276 & -0.0293 \\ -0.0293 & -0.0091 \end{bmatrix}, \quad \widehat{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -7.5041 & 24.1616 \\ 24.1616 & -187.6850 \end{bmatrix}$$

El punto estacionario (máximo), se encontró en:

$$\widehat{X}_0 = (49.4987, 186.219),$$

donde 49.4987 kg/ha es la cantidad de superfosfato triple y 186.219 kg/ha la de roca fosfórica del Huila. Reemplazando estos valores en la ecuación [14], se logró un rendimiento estimado de 4902.40 kg/ha.

Las raíces características de la matriz \widehat{E} , fueron $\lambda_1 = -0.0052$ y $\lambda_2 = -0.2315$; estos valores indican que en el punto \widehat{X}_0 , se alcanzó el máximo rendimiento. Utilizando los valores anteriores, se obtuvo la forma canónica de la ecuación [14]:

$$\widehat{y} = 4901.50 - 0.00523 w_1^2 - 0.23146 w_2^2,$$

\widehat{y} = rendimiento, SFT = superfosfato triple y RFH = roca fosfórica del Huila.

en la ecuación anterior $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, lo cual indica que un desplazamiento sobre el eje w_1 causa cambios menores en rendimiento que el mismo desplazamiento sobre el eje w_2 . Adicionalmente, λ_1 está cercano a cero, por lo cual se puede concluir que existen puntos sobre el eje w_1 que se aproximan a la condición de máximo (Figura 1).

La relación entre las variables w_i ($i = 1, 2$) y las cantidades de superfosfato triple y de roca fosfórica del Huila, fue la siguiente:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1306 & 0.9914 \\ -0.9914 & -0.1306 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{SFT} & -49.4987 \\ \text{RFH} & -186.219 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = 0.9914 \text{ RFH} - 0.1306 \text{ SFT} - 178.1566$$

$$w_2 = -0.1306 \text{ RFH} - 0.9914 \text{ SFT} + 73.402$$

de las anteriores ecuaciones, se deduce que la roca fosfórica del Huila tiene mayor incidencia sobre w_1 y el superfosfato triple sobre w_2 (Figura 1).

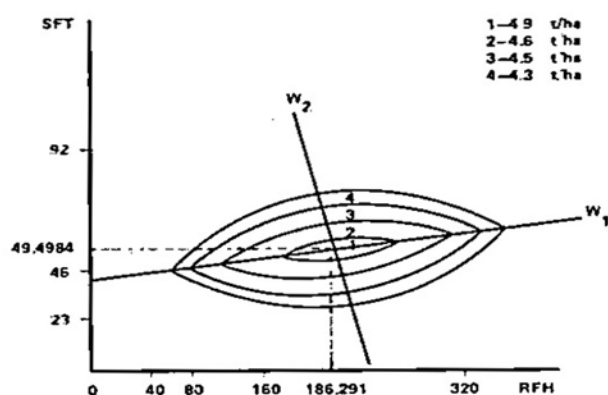


FIGURA 1. Contornos del rendimiento de arroz, para las cantidades aplicadas de roca fosfórica y superfosfato triple.

Análisis del ingreso neto. Para el análisis del ingreso neto se consideraron los siguientes precios: \$13.20 el kilo de arroz, \$39.00 el kilo de superfosfato triple y \$8.20 el kilo de roca fosfórica del Huila; de modo que $P_y = 13.20$ y $P'_x = (39.00, 8.20)$. Se supuso un costo fijo por hectáreas $CF = \$20.000$ y para efectos del análisis con capital limitado se consideró el valor $C = \$1.000$ por hectárea.^{2/}

^{2/} Datos suministrados por la Sección de Economía Agraria, ICA. (Julio de 1984).

— Capital ilimitado. Con base en los anteriores datos, el ingreso neto estimado fue:

$$\widehat{IN} = P_y \widehat{Y} = X' P_x - CF \quad \dots [15]$$

reemplazando se tiene:

$$\widehat{IN} = 13.20 \{ 3488.1432 + 33.4442\text{SFT} + 6.2898\text{RFH} - 0.2276\text{SFT}^2 - 0.0091\text{RFH}^2 - 0.0585\text{SFT} * \text{RFH} \} - 39.00\text{SFT} - 8.20\text{RFH} - 20000$$

el óptimo económico se encontró en el punto:

$$\widehat{X}_{cp} = \frac{1}{2} \widehat{B}^{-1} (r - \widehat{b});$$

$$\widehat{X}_{cp} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -7.5041 & 24.1616 \\ 24.1616 & -187.6850 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.95455 & -33.4442 \\ 0.6212 & -6.2898 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.9158 \\ 163.8738 \end{bmatrix};$$

aplicando 45.9158 kg/ha de superfosfato triple y 163.8738 kg/ha de roca fosfórica, se alcanzó un rendimiento estimado de 4890.099 kg/ha de arroz (ecuación [5]) y el ingreso neto máximo estimado fue de \$41.414.8310/ha; este valor se obtuvo de reemplazar a X' por \widehat{X}_{cp} en la ecuación [15].

— Capital limitado. Imponiendo una restricción al capital por hectárea, con un valor de \$1.000/ha, se estimó el ingreso neto mediante la siguiente ecuación:

$$\widehat{IN} = 13.20 \{ 3488.1432 - 33.4442\text{SFT} - 6.2898\text{RFH} - 0.2276\text{SFT}^2 - 0.0091\text{RFH}^2 - 0.0585 \text{SFT} * \text{RFH} \} - 39.00\text{SFT} - 8.20\text{RFH} - 20000 - 6.5614 (39.00\text{SFT} + 8.20\text{RFH} - 1000),$$

el óptimo económico dió un ingreso neto estimado de \$34409/ha, resultado de aplicar 22.422 kg/ha de superfosfato triple y 15.3091 kg/ha de roca fosfórica del Huila.

$$\widehat{X}_{cp}^* = (22.4222, 15.3091).$$

el rendimiento en este punto fue de 4197.65 kg/ha.

Análisis canónico del ingreso neto. A partir de los resultados teóricos, (ecuaciones [11] y [13]), expuestos anteriormente, se deduce que el sentido de la rotación de los ejes no varía en ninguno de los tres casos en mención; únicamente cambia el origen de los ejes rotados. Este punto es \widehat{X}_c , en el caso del máximo, \widehat{X}_{cp} y \widehat{X}_{cp}^* , cuando, respectivamente, se tiene capital ilimitado y capital limitado. La figura 2, muestra los contornos de la superficie de respuesta de la variable ingreso neto, en el caso de capital ilimitado.

En la tabla 1, se observa la relación entre el ingreso neto y la cantidad de superfosfato triple y de roca fosfórica del Huila, sin restricción de capital limitado.

Punto de silla. Para ilustrar la situación en un punto de silla, se supuso la siguiente ecuación:

$$\hat{y} = 2576.1562 + 30.2642 * SFT + 2.3812 * RFH + 0.124 * SFT^2 - 0.0046 * RFH^2 - 0.03644 * SFT * RFH, \text{ } ^3/ \dots [16]$$

donde \hat{y} , SFT y RFH, tienen el mismo significado dado anteriormente.

Análisis canónico del rendimiento estimado. La siguiente información, se obtuvo a partir del modelo propuesto:

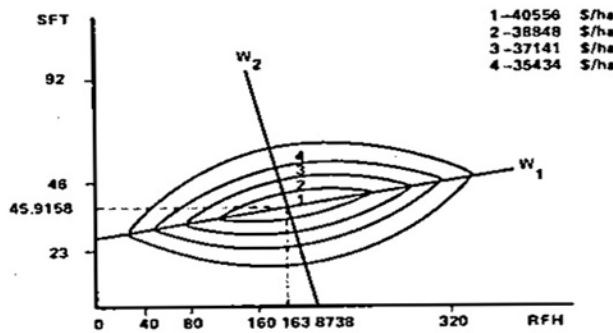


FIGURA 2. Contornos del ingreso neto, para las cantidades aplicadas de roca fosfórica y superfosfato triple.

^{3/} Datos ficticios.

TABLA 1. Cantidades de superfosfato triple kg/ha, roca fosforica del Huila kg/ha e ingreso neto \$/ha.

Capital ilimitado			Capital limitado		
SFT	RFH	IN	SFT	RFH	IN
43	160	41378.7	20	14	34389.1
43	162	41384.6	20	16	34395.0
43	164	41389.5	20	18	34396.0
43	166	41393.4	20	20	34395.0
43	168	41396.5	20	22	34399.1
43	170	41398.5	20	24	34399.2
44	160	41396.2	21	14	34401.7
44	162	41400.6	21	16	34404.1
44	164	41403.9	21	18	34405.5
44	166	41406.4	21	20	34406.0
44	168	41407.8	21	22	34405.5
44	170	41408.3	21	24	34404.1
45	160	41407.7	22	14	34408.2
45	162	41410.5	22	16	34409.1
45	164	41412.4	22	18	34409.0
45	166	41413.2	22	20	34407.9
45	168	41413.2	22	22	34405.9
45	170	41412.1	22	24	34402.8
46	160	41413.3	23	14	34408.8
46	162	41414.5	23	16	34408.1
46	164	41414.8	23	18	34406.5
46	166	41411.1	23	20	34403.9
46	168	41412.5	23	22	34400.3
46	170	41409.9	23	24	34395.8
47	160	41412.8	24	14	34403.4
47	162	41412.5	24	16	34401.1
47	164	41411.2	24	18	34397.9
47	166	41409.0	24	20	34393.8
47	168	41405.8	24	22	34388.7
47	170	41401.7	24	24	34382.6

$$\hat{b}_0 = 2576.1563$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.1242 & -0.01822 \\ -0.01822 & -0.0023 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b}^2 = (30.2642, 2.3812)$$

$$\hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 5.0925 & -20.1707 \\ -20.1707 & -137.498 \end{bmatrix}$$

El punto estacionario (inflexión o silla), se encontró en:

$$\hat{X}_0 = (-53.045, 468.93),$$

donde -53.045 kg/ha es la cantidad de superfosfato triple y 468.93 kg/ha la de roca fosfórica del Huila. Como se observa, este punto, además de ser un punto de silla, tiene sus valores fuera de la región de exploración. El rendimiento en este punto fue de 4354.8198 kg/ha.

Las raíces características, $\lambda_1 = 0.1267$ y $\lambda_2 = -0.0071$, de la matriz \hat{B} , indican que el punto X_0 es un punto de silla. La forma canónica de la ecuación [16] fue:

$$y = 4354.8198 + 0.1267w_1^2 - 0.0071w_2^2$$

en la ecuación anterior $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, lo que implica que un desplazamiento a lo largo del eje w_2 hace variar la respuesta en menor proporción que el mismo desplazamiento sobre el eje w_1 . El valor de λ_2 está próximo a cero, con lo cual, se concluye que a lo largo del eje w_2 se pueden encontrar puntos con condiciones similares al punto de silla. Un desplazamiento en cualquier dirección en w_1 , causa un decremento en el rendimiento, mientras que en el eje w_2 , causa un incremento.

La relación entre las variables w_1 y w_2 con las cantidades de superfosfato triple y roca fosfórica se expresa como:

$$\begin{matrix} w_1 = \\ w_2 = \end{matrix} \begin{bmatrix} -0.9905 & 0.1374 \\ 0.9374 & -0.9905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{SFT} + 54.045 \\ \text{RFH} - 468.93 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = -0.9905\text{SFT} + 0.1374\text{RFH} - 117.9721$$

$$w_2 = 0.1374\text{SFT} - 0.9905\text{RFH} + 515.137$$

De las anteriores expresiones, se concluye que el superfosfato triple tiene mayor influencia sobre la variable w_1 y la roca fosfórica sobre la variable w_2 .

Análisis del ingreso neto. En esta sección, se trabajó con la información suministrada en el análisis del ingreso neto en el caso de un máximo.

— Capital ilimitado. La ecuación del ingreso neto estimado por hectárea fue:

$$\hat{IN} = 13.20 \{ 2576.1563 + 30.26425\text{SFT} + 2.3812\text{RFH} + 0.1242\text{SFT}^2 - 0.0046\text{RFH}^2 - 0.0364\text{SFT} * \text{RFH} \} - 39\text{SFT} - 8.20\text{RFH} - 20.000$$

En el punto $\hat{X}'_0 = (-51.7871, 396.425)$, el ingreso neto estimado por hectárea fue de 9275.8207 \$/ha. En este valor se encuentra un punto de silla, fuera de la región de exploración; el objetivo entonces, es desplazarse a lo largo de los ejes w ($i = 1, 2$) y encontrar las condiciones óptimas de producción. El ingreso neto estimado en función de las variables w ($i = 1, 2$) se obtuvo reemplazando Z en la ecuación [11]:

$$\hat{IN} = 9275.8207 + 0.1267 w_1^2 - 0.0071 w_2^2 \dots [17]$$

La relación entre las variables w : ($i = 1, 2$) y las cantidades de superfosfato triple y de roca fosfórica del Huila fue:

$$\begin{matrix} w_1 = \\ w_2 = \end{matrix} \begin{bmatrix} -0.9905 & 0.1374 \\ 0.1374 & -0.9905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{SFT} + 51.7871 \\ \text{RFH} - 396.425 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = -0.9905\text{SFT} + 0.1374\text{RFH} - 105.7639$$

$$w_2 = 0.1374\text{SFT} - 0.9905\text{RFH} + 399.7723$$

La ecuación [17] muestra que al desplazarse sobre el eje w_1 el ingreso neto se incrementa, mientras que sobre el eje w_2 disminuye, lo anterior resalta la importancia de la variable w_1 . De la relación de w_1 con los insumos, se observa que el SFT es el de mayor influencia (Figura 3).

Para hacer inferencia dentro de la región de explotación se combinaron los valores externos de las cantidades de superfosfato y de roca fosfórica y se encontró el valor de w_1 , w_2 y de \hat{IN} :

SFT	RFH	w_1	w_2	\hat{IN}
0	0	-105.7639	399.7723	9558.3802
0	320	-61.7959	82.8123	9710.9633
92	0	-196.8899	412.4131	12979.826
92	320	-152.9279	95.4531	12174.024

Los resultados anteriores, sugieren que el máximo ingreso neto estimado se presentó alrededor de 92 kg/ha de superfosfato triple y cerca de 0 kg/ha de roca fosfórica. En la tabla 2, se presentan valores de superfosfato triple, roca fosfórica, w_1 , w_2

TABLA 2. Cantidades de superfosfato triple kg/ha, roca fosf3rica del Huila, w_1 , w_2 e ingreso neto \$/ha.

SFT	RFH	w_1	w_2	\widehat{IN}
89	0	-193.9184	412.0009	12835.1037
89	1	-193.7810	411.0104	12834.9639
89	2	-193.6436	410.0199	12833.1717
89	3	-193.5062	409.0294	12832.1919
89	4	-193.3688	408.0389	12831.2031
89	5	-193.2314	407.0489	12830.2022
90	0	-194.9089	412.1383	12883.0961
90	1	-194.7715	411.1478	12882.1021
90	2	-104.6341	410.1573	12881.0990
90	3	-194.4967	409.1668	12880.0867
90	4	-194.3593	408.1763	12879.0653
90	5	-194.2219	407.1859	12878.0341
91	0	-195.8994	412.2757	12931.3369
91	1	-195.7620	411.2852	12930.3103
91	2	-195.6246	410.2947	12929.2746
91	3	-195.4872	409.3042	12928.2298
91	4	-195.3498	408.3137	12927.1758
91	5	-195.2124	407.3232	12926.1127
92	0	-196.8899	412.4131	12979.8260
92	1	-196.7725	411.4226	12979.7641
92	2	-196.6651	410.4321	12976.7212
92	3	-196.4777	409.4416	12976.6212
92	4	-196.3403	408.4511	12975.5347
92	5	-196.2029	407.4706	12974.4390

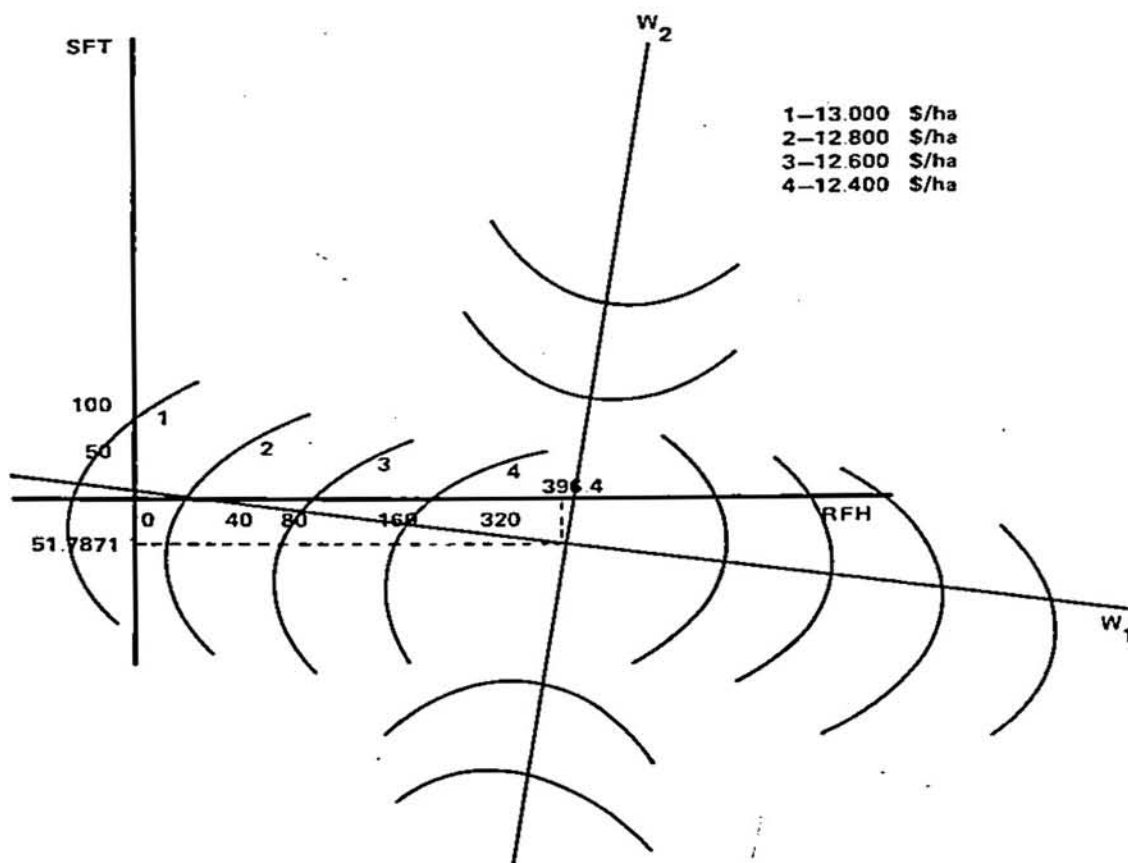


FIGURA 3. Contornos del ingreso neto, para las cantidades aplicadas de roca fosf3rica y superfosfato triple.

e ingreso neto; se observa que al alejarse de 92 kg/ha de SFT y de 0 kg/ha de RHF el ingreso neto disminuye, por tanto, el máximo ingreso neto, dentro de la región de exploración, se encuentra con 92 kg/ha de SFT y 0 kg/ha de RHF. El mismo análisis se puede realizar en el caso de capital ilimitado.

El problema en el análisis del ingreso neto, son los precios de los insumos y del producto, los cuales están sujetos a fluctuaciones; por otra parte, la función de producción puede no ser un buen ajuste, de tal forma que no se puede dar una recomendación final.

Bajo un buen ajuste, un cambio en los precios da como resultado un cambio en las cantidades de insumos para lograr un ingreso neto máximo; pero la dirección de la rotación de los ejes no varía, esto implica que la forma de la superficie no se altera.

La ventaja del desplazamiento a lo largo de los ejes rotados y de su relación con los ejes originales, es la de lograr determinar condiciones similares a las óptimas, o encontrar la máxima respuesta dentro de la región de exploración, para tomar una decisión acerca de las cantidades a aplicar.

Es posible tener en cuenta otros criterios para determinar el ingreso neto óptimo, como son tasa

de retorno al capital, tasa de retorno al capital total, etc., para los cuales se podría realizar el mismo análisis.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Box, G. E. P.; Draper, N. R. 1959. A basis for the selection of a response surface designs. *Journal of American Statistical Association*. 54: 622-654. (U.S.A.).
2. Box, G. E. P.; Hunter, J. S. 1957. Multifactor experimental designs for exploring response surface. *Annals of Mathematical Statistics* (U.S.A.). 28:195-241.
3. Box, G. E. P.; Wilson, K. B. 1951. On the experimental attainment of optimum conditions. *Journal of the Royal Statistical Society* (Inglaterra) Serie B.
4. Davies, O. L. 1954. *Design and analysis of industrial experiments*. Oliver and Boyd, Edimburg.
5. Myers, R. H. 1971. *Response surface methodology*. Allyn and Bacon, Boston.
6. Noble, B. 1969. *Applied linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, INL.