5632

DIVISION DE ESTUDIOS SOCIOECONOMICOS

Programa de Estudios Agroeconómicos

Programa Sistemas de Producción

METODOS UTILIZADOS EN EL ANALISIS AGROECONOMICO DE LA RESPUESTA DE CULTIVOS A FERTILIZANTES

Por:

Juan G. Acosta L., IA, M.S.
Vicente Flórez D., IA, M.S.

Tibaitatá, Marzo 1º de 1977

1. INTRODUCCION

1.1. GENERALIDADES

La demanda creciente por productos agropecuarios requiere del uso racional de los diferentes recursos productivos del sector a fin de aumentar la producción, principalmente a través de incrementos en la productividad de los factores de producción. El objetivo buscado es que el costo de producción por unidad de producto resulte más bajo, utilizando las nuevas recomendaciones técnicas, que el obtenido en situaciones anteriores.

El uso de fertilizantes es uno de los principales componentes de la mayor productividad en cultivos. Sin embargo el aumento acelerado en el precio de los insumos respecto al de los productos obtenidos, requiere continuos ajustes en los planes de producción, a fin de determinar los nuevos niveles óptimos de uso de los recursos para maximizar los ingresos netos o minimizar los costos de producción. Esto es particularmente crítico en el caso de los recursos que el productor debe adquirir en el mercado, como ocurre con los fertilizantes, los cuales representan un alto porcentaje de los costos de producción y además, son imprescindibles en vastas áreas agrícolas del país.

Generalmente los modelos teóricos usados para analizar la respuesta de un cultivo a la aplicación de un factor de producción, por ejemplo fertilizante, exxpresan el rendimiento por unidad de superficie como una función de factores tales como semilla, fertilidad del suelo, condiciones ecológicas, prácticas de cultivo, etc.

Una vez seleccionado el diseño más adecuado para realizar el experimento, por parte del estadístico, viene el control del mismo para lo cual el agrónomo diseña formatos especiales que faciliten la recopilación de toda la información necesaria a fin de permitir la interpretación correcta de los resultados finales del ensayo.

El economista agrícola, una vez obtenida toda la información de campo y en colaboración con el estadístico, analiza los resultados para seleccionar el modelo más relevante, es decir que se ajuste mejor a las condiciones reales y que permita una mayor confiabilidad estadística. Sin embargo, una de las mayores contribuciones del economista agrícola está en el estudio de la respuesta de los cultivos a los recursos de producción con el fin de determinar luego si la inversión hecha en fertilización, por ejemplo, produce mayores retornos por peso invertido que cualquiera otra alternativa. Igualmente, determinar si el emplear fertilizantes en un cultivo específico es más rentable que invertirlo en otro. Además, su contribución es importante en el análisis de los costos de fertilización en relación con los costos totales de producción y la variación en los costos unitarios de producción a medida que aumentan los rendimientos del cultivo por unidad de superficie.

Una vez realizados los cálculos para determinar el uso óptimo del fertilizante, así como los niveles de ganancias obtenidas, el agrónomo, el estadístico y el economista deben participar en la discusión final sobre la validez de los resultados obtenidos. En adición a lo anterior, deberá estudiarse la factibilidad de que el agricultor adopte las recomendaciones finales del estudio, para lo cual deben tenerse en cuenta la disponibilidad del recurso, la actitud del agricultor hacia el cambio, la diferencia en rentabilidad frente a la anterior práctica y el nivel de riesgo que todo cambio conlleva.

A lo anterior puede agregarse que el análisis agroeconómico es de gran utilidad para técnicos (agrónomos, economistas agrícolas y demás técnicos de ramas afines dentro del sector agropecuario), porque permite orientar la investigación sobre uso de factores de producción, especialmente para aquellos insumos que son críticos tanto por su escasez como por su gran incidencia en los niveles de producción y en los ingresos netos.

1.2. TEORIA DE LA RESPUESTA

El término respuesta o función de respuesta, se utiliza como sinónimo de función de producción. La teoría de la respuesta busca explicar y cuantificar la acción que diferentes factores tienen en la obtención de varios niveles de producción de un producto. Debido a la dificultad que se encuentra al explicar muchos fenómenos relacionados con la producción de las plantas, es necesario recurrir a una serie de simplificaciones y supuestos para lograr que la teoría tenga un cubrimiento o explicación amplia de fenómenos particulares. Por esto, la explicación matemática que se presentará en la Sección 4, debe considerarse como una herramienta de análisis a disposición del investigador para llegar a conclusiones válidas sobre el uso más eficiente de los fertilizantes. Su confrontación con las observaciones de campo deberá indicar la consistencia y utilidad de los resultados en relación con los conocimientos obtenidos en otras ciencias que estudian el desarrollo de las plantas.

1.3. LOS FACTORES DE PRODUCCION

De acuerdo con la ley del mínimo de Liebig, se espera que una vez que todos los factores que afectan el crecimiento de la planta le sean suministrados en cantidades adecuadas, se obtendrá un rendimiento máximo. El problema es, entonces, identificar los factores que influyen en el crecimiento de las plantas y cuáles las cantidades adecuadas requeridas. La utilidad obvia de la respuesta a estos interrogantes es el conocimiento de cuáles son los factores que el agrónomo puede manejar para buscar cambios deseables en el comportamiento de la respuesta de las plantas y cómo manipularlos para lograr los objetivos propuestos. Se reconocen tres tipos generales de factores: genéticos, ambientales y prácticas de cultivo.

1.3.1. Factores genéticos.

Cada especie vegetal tiene una composición genética en la cual se encuentran presentes todas las características cuantitativas y cualitativas que la planta pueda llegar a exhibir. Una de ellas es la capacidad de responder a diversos factores externos y mostrar esta respuesta como variaciones en el rendimiento y/o en la calidad de la producción. La característica "mayores rendimientos" ha sido explicada por la influencia que ejercen los genes sobre los procesos fisiológicos mediante mecanismos que controlan la síntesis de las enzimas (Tisdale y Nelson, 22).

Es lógico esperar que cada variedad muestre su mejor comportamiento cuando factores externos como la provisión de nutrimentos por ejemplo, permitan expresar su potencial genético.

1.3.2. Factores ambientales:

Son la suma de todas las condiciones e influencias externas que afectan la vida y desarrollo de un organismo. Los mismo autores discuten la influencia que estos factores ejercen sobre el desarrollo de las plantas, dando especial interés al suministro de nutrimentos minerales para el análisis de la respuesta. Estos son los factores que se consideran variables para el análisis propuesto y que deben explicar las diferencias en rendimiento de la planta, según la cantidad suministrada. Los factores temperatura, humedad, energía radiante, composición de la atmósfera, características del suelo y factores bióticos, son considerados como constantes o dados en el análisis de la respuesta a los fertilizantes (Tisdale y Nelson 22). Esta es una suposición discutible debido a que el investigador no siempre logra un grado de control adecuado sobre tales factores en cada experimento. Sin embargo, se acepta con miras a una mayor facilidad para el análisis.

1.3.3. Prácticas de Cultivo

Son las actividades que realiza el agricultor para tratar de controlar algunos de los factores ambientales ya mencionados, con el fin de proveer un medio adecuado para el desarrollo de las plantas útiles.

2. MODELOS UTILIZADOS EN EL ANALISIS DE LA RESPUESTA

Algunas de las principales bases de la teoría sobre el crecimiento de las plantas fueron desarrolladas por Liebig a mediados del Siglo XIX (Tisdale, 22). Uno de sus principales aportes al desarrollo de la agricultura moderna es la conocida como "Ley del Mínimo". Esta sostiene que el crecimiento de las plantas está limitado por el nutrimento que se halla presente en menor cantidad estando los restantes nutrimentos presentes en cantidades adecuadas. Los primeros intentos para cuantificar y expresar en un modelo matemático al crecimiento de las plantas fueron realizados por Mitscherlich en 1909. Posteriormente, investigadores de varios países han desarrollado diferentes modelos, los cuales son utilizados actualmente para analizar la respuesta de cultivos a la aplicación de diferentes factores de producción. Todos ellos están basados en la representación matemática de las relaciones entre rendimientos de la planta y las cantidades de los recursos utilizados.

El uso de modelos en el estudio de la fertilización de cultivos es útil porque ayuda a controlar y manejar una serie de conceptos, teorías, relaciones y explicaciones sobre las variables que entran a formar parte del proceso de crecimiento y su contribución cualitativa o cuantitativa. El modelo más elaborado hasta el momento es el de funciones de producción o "Modelo Continuo". Este modelo permite estudiar simultáneamente la respuesta a la aplicación de varios recursos y adaptar la interpretación del modelo a varias de las características biológicas del fenómeno. El modelo alternativo fué desarrollado por investigadores de la Universidad de Carolina del Norte y se conoce como "Modelo Discontinuo". Su principal característica es la de presentar buen ajuste para explicar la ley del mínimo. Es decir, sirve para predecir la producción máxima como respuesta a un nutrimento, dados los niveles de los nutrimentos restantes. Estos modelos serán presentados e ilustrada la metodología para su análisis y el proceso para llegar a recomendaciones finales sobre el uso óptimo de los fertilizantes.

3. LA FUNCION DE PRODUCCION

El proceso de producción agropecuaria requiere de una amplia variedad de factores tales como tierra, mano de obra, capital, y administración, para la obtención de un producto. En consecuencia, para un nivel de tecnología dado, la cantidad de producto que se puede obtener depende de las cantidades de los varios factores de producción empleado. Esta relación es descrita más comúnmente por una función de producción que relaciona niveles de producción física con niveles de uso de los recursos. Entonces, la función es la representación de la relación que existe entre cantidades que miden propiedades de por lo menos dos variables.

Las relaciones funcionales se pueden representar en forma gráfica, tabular y matemática. La función de producción, en su forma matemática más simple, puede expresarse así:

$$Y = f(X)$$

que se lee: Y es una función de X. De acuerdo con el tipo de relación expresada en la función, ésta toma diferentes formas matemáticas y por consiguiente diferentes propiedades.

Los recursos necesarios para obtener un producto pueden clasificarse en:

- Factores cuyas cantidades a utilizar varían con el nivel de producción (factores variables)

- Factores cuyas cantidades a utilizar no varían con el nivel de producción (factores fijos).

En la función $Y = f(X_1, X_2, ... X_d / X_{d+1}, ... X_n)$, los primeros d factores son variables, y desde d + 1 hasta n son los factores fijos.

Es posible utilizar muchos modelos matemáticos para representar la respuesta de las plantas a la fertilización.

Para la discusión del modelo contínuo se tendrá en cuenta la función cuadrática, cuya representación matemática es:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_1^2$$

donde,

b_1 = Es el coeficiente que representa el cambio en la variable dependiente Y, como resultado de incrementar en una unidad la variable X_1

b_2 = Representa el cambio en Y como resultado de incrementar en una unidad la variable X_1 elevada al cuadrado.

Las ventajas del modelo cuadrático son : representar los rendimientos decrecientes, permitir calcular un rendimiento máximo, representar y calcular muchas de las propiedades teóricas de la función de producción (por ejemplo, la producción marginal, la producción promedia, la tasa marginal de sustitución entre factores, etc.), básicamente la relación factor-producto y factor-factor, como se explicará posteriormente.

El modelo permite además incluír el número deseado de variables independientes y estudiar las interacciones entre ellas. De otra parte, permite representar dos de las tres etapas de la producción: la segunda, que es la más relevante para el análisis económico, y la tercera en la cual se observa una reducción en la producción total. Al analizar los resultados de algunos experimentos puede observarse también la presencia de rendimientos crecientes; esto puede causar que la forma de la curva calculada por regresión sea cóncava hacia arriba. Por consiguiente, el investigador debe analizar estas situaciones, las cuales se reflejan en el signo de los coeficientes de las variables independientes, a fin de hacer las recomendaciones correctas basadas en el análisis del modelo cuadrático.

La principal limitación del modelo cuadrático esla complejidad de los cálculos cuando no se dispone del computador y se incluyen dos o más variables independientes. Además, algunos autores opinan que el modelo presenta la tendencia a sobre-estimar el rendimiento máximo y las cantidades de fertilizantes necesaria para obrener dicho máximo.

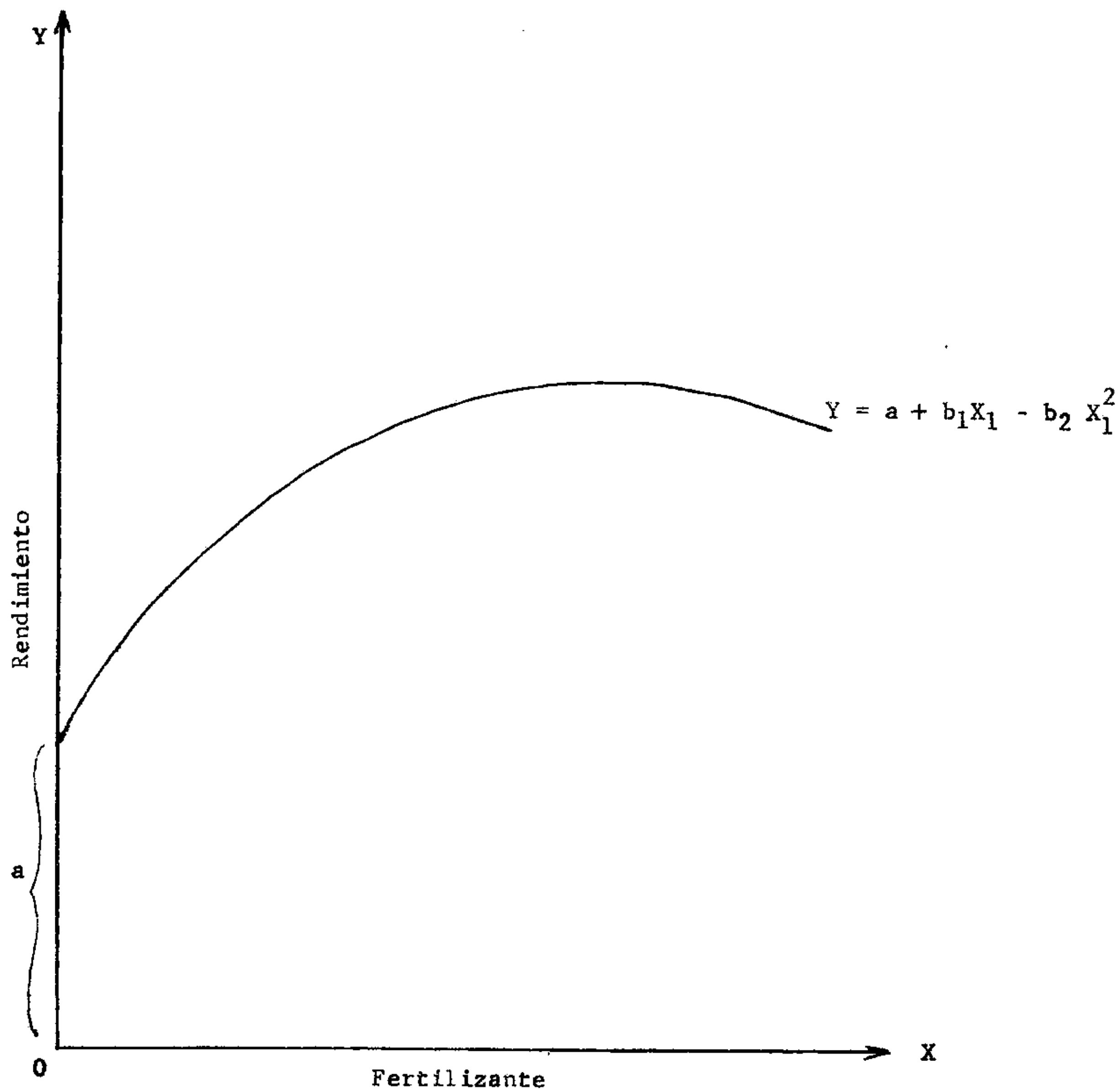

Figura No.1 Ilustración gráfica de la función cuadrática.

4. APLICACION DEL METODO CONTINUO AL ANALISIS ECONOMICO DE LA RESPUESTA DE CULTIVOS A LA FERTILIZACION

Para maximizar ganancias el productor debe determinar la cantidad de producto que debe producir y la combinación óptima de recursos para obtenerlo. Esto depende de la cantidad y la calidad de los recursos disponibles y de las relaciones de precios de éstos y del producto. En esta sección se presenta la teoría que explica cómo el productor puede maximizar ganancias cuando se produce:

- Un producto con un factor variable (relación factor-producto)
- Un producto con dos o más factores variables (relación factor-factor).

4.1. ANALISIS PARA UN SOLO FACTOR VARIABLE.

4.1.1. Relaciones Factor-Producto.

Un concepto básico es el de la función de producción que representa la obtención de un producto utilizando un insumo variable y los demás considerados fijos. Matemáticamente la función puede expresar así: $Y = f(X_1/X_2 ... X_n)$, la cual se representa en la Figura 2.

La forma de la función refleja la "Ley de los rendimientos físicos marginales decrecientes", que se expresa así: Si un recurso se incrementa en cantidades iguales por unidad de tiempo, mientras que las de los demás factores permanecen constantes, el producto total obtenido aumenta pero se alcanzará un punto después del cual los incrementos adicionales en la producción se vuelven cada vez menores.

Algunos de los conceptos empleados en el análisis son:

- El producto físico promedio (PFP) que es igual al producto físico total dividido por la cantidad de insumo variable X, es decir:

$$PFP = \frac{PFT}{X} = \frac{Y}{X}$$

Esta relación equivale al concepto de "eficiencia de producción". En la figura 2, la producción promedio se inicia en cero, aumenta hasta un máximo y luego disminuye permaneciendo positiva. En términos trigonométricos, la producción promedia, representada por la relación Y_1/X_1, equivale a la tangente del <u>ángulo a</u> en la Figura 2. La cantidad máxima del producto promedio, que corresponde al valor máximo posible del <u>ángulo a</u>, se alcanza con el uso de X_3 unidades del factor variable y es igual a la relación Y_3/X_3. Con la aplicación de X_4 unidades de insumo se obtiene la máxima producción total y el producto promedio es menor que el correspondiente a X_3 unidades.

- El producto físico marginal (PFM) es el aumento en el producto (ΔY) como resultado de la aplicación de una unidad adicional del insumo variable X (ΔX), o sea:

$$PFM = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad 1/$$

1/ Cuando ΔX se hace muy pequeño, la relación $\Delta Y/\Delta X$ se expresa como dy/dx, que equivale a la primera derivada de la función de producción con respecto al factor variable X.

Cuando el uso del factor X aumenta de X_1 a X_2, el producto total crece de Y_1 a Y_2 (Figura 2). Por lo tanto puede escribirse:

$$\Delta Y = (Y_2 - Y_1)$$

$$\Delta X = (X_2 - X_1)$$

La relación $\Delta Y/\Delta X$ es el valor de la pendiente de la curva de producción entre X_1 y X_2. Tanto la pendiente de la función de producción como el producto físico marginal aumentan hasta X_1 unidades de insumo, para luego disminuír hasta cuando la producción total alcanza el punto máximo (con el uso de 4 unidades de insumo). En este punto la pendiente de la curva del PFT y el producto físico marginal son iguales a cero. Si se utilizan más de X_4, unidades de insumo, el producto físico marginal llega a ser negativo y el producto total disminuye.

Por otra parte, el producto físico marginal es igual al producto físico promedio cuando éste alcanza su máximo valor (con el uso de X_3 unidades de Insumo).

.1.1. Etapas de la Producción.

La función de producción relaciona la cantidad de producto resultante del uso de varias cantidades de factor variable. El producto físico promedio (PFP) aumenta hasta alcanzar su máximo, debido a incrementos en la cantidad de factor hasta el nivel X_3 (ver figura 2). Esto quiere decir que la eficiencia o productividad promedia del factor variable está aumentando. En este mismo rango el producto físico total aumenta y por lo tanto la eficiencia en el uso de los factores fijos también se está aumen-

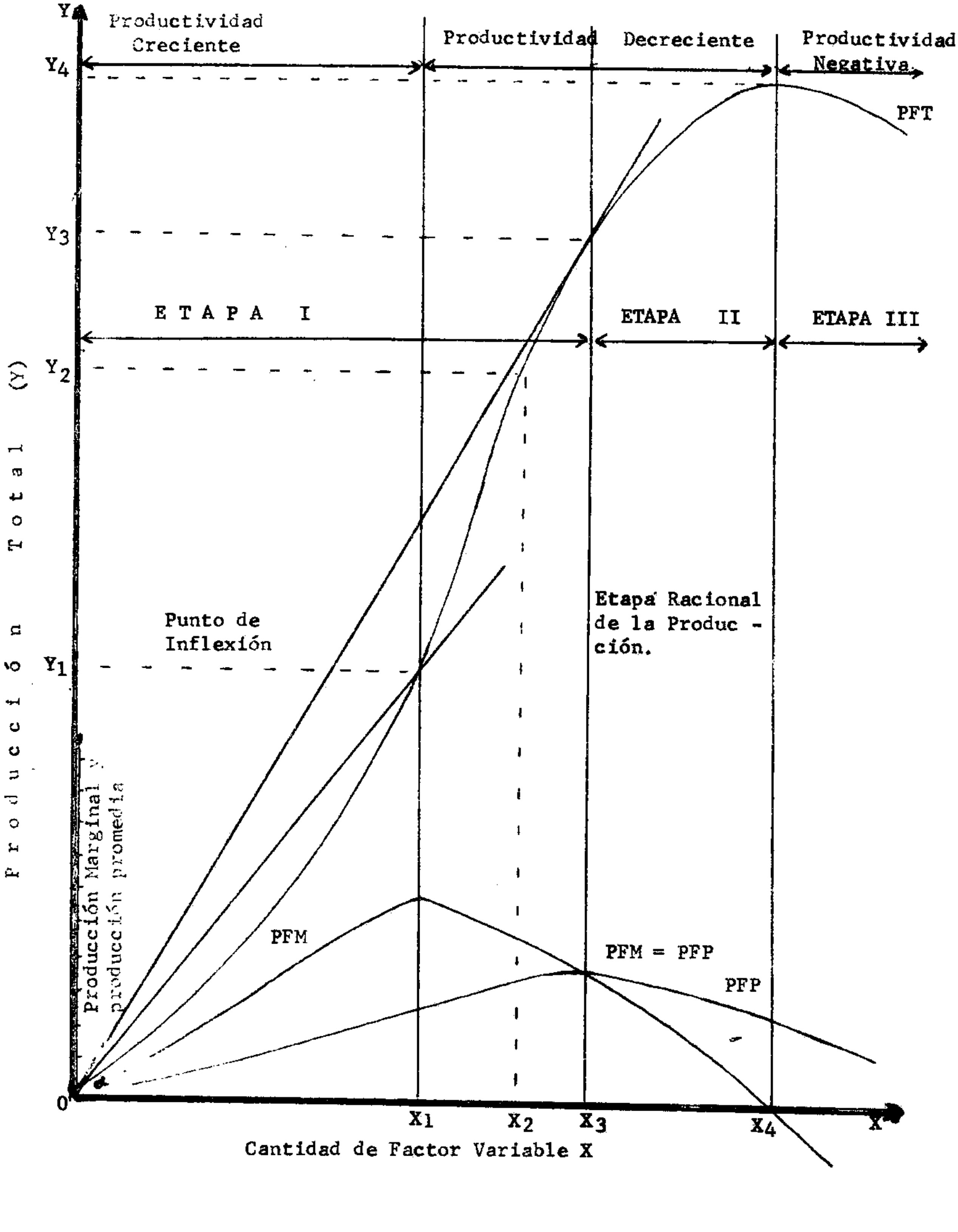

FIGURA 2. Relación Factor - Producto e Ilustración de las Etapas de la Producción.

tando, porque más producto resulta de un nivel dado de esos factore. En consecuencia, la cantidad mínima de factor variable que debe usarse será aquel nivel que maximice el PFP porque así no solamente se obtiene la máxima eficiencia del factor variable sino que también se incrementa la del factor fijo.

El área comprendida entre las verticales que pasan por el origen del sistema de coordenadas y el punto donde la producción promedio es igual a la producción marginal se conoce como etapa I de la producción. (figura 2) se conoce también como etapa de los rendimientos marginales crecientes.

La Etapa II sigue hasta donde la última unidad de factor variable agregada resulta en el máximo producto físico total, punto en el cual se inicia la Etapa III. Con el uso del factor variable más allá de este punto (X_4), el producto físico total disminuye y la eficiencia de todos los factores decrece. Desde el punto de vista de la productividad física, la cantidad máxima de factor variable que podría utilizarse debe ser aquella que resulte en el máximo producto físico total. La cantidad económicamente óptima de factor variable tiene que estar representada en la Etapa II de la producción en la cual la eficiencia de los factores fijos está aumentando con un incremento en el uso del recurso variable, aunque la eficiencia de este último está disminuyendo. La cantidad óptima de factor variable que debe usarse dependerá en último término de la relación de los precios del factor variable y del producto.

En resumen, en la Etapa I de la producción el PFM es mayor que el PFP y éste está aumentando. Si se decide utilizar el factor variable, debe usarse al menos la cantidad que permita alcanzar el máximo PFP, punto en el cual se inicia la Etapa II. En la Etapa II, el PFP es mayor que el PFM y los dos están disminuyendo pero presentan valores positivos. Se inicia la Etapa II donde el PFM pasa de cero a negativo y el PFT empieza a disminuír. Nunca se debe usar tanta cantidad de recurso variable que conduzca a la Etapa III. Por lo tanto, la única etapa racional de producción es la Etapa II.

.1.2. Uso Económico Optimo del Factor Variable.

La eficiencia física del factor variable se maximiza utilizando aquella cantidad necesaria para llegar al punto inicial de la Etapa II de la producción, mientras que la eficiencia del factor fijo se maximiza en el punto donde termina esta etapa. La utilización óptima del factor variable en el sentido económico está dentro de la Etapa II, y dependerá tanto del costo unitario del factor variable como del precio del producto. Tal cantidad de factor variable es la que maximiza el ingreso neto o ganancias para el productor.

El ingreso total (IT) es igual al valor total de la producción. El costo total (CT) es igual a la suma de los costos variables (CV) y los costos fijos (CF). Cuando varía un solo insumo, el costo variable se refiere únicamente al costo de éste factor y todos los otros costos son fijos. Esta situación es real cuando se considere, por ejemplo, la adición de fertilizantes a un cultivo ó un concentrado a la alimentación animal.

En la figura 3 (a) se representan las funciones de valor total de la producción (VTP) o ingreso total (IT), la de costos variables (CV) y la de costos totales (CT). El área entre la curva de VTP y la de costo

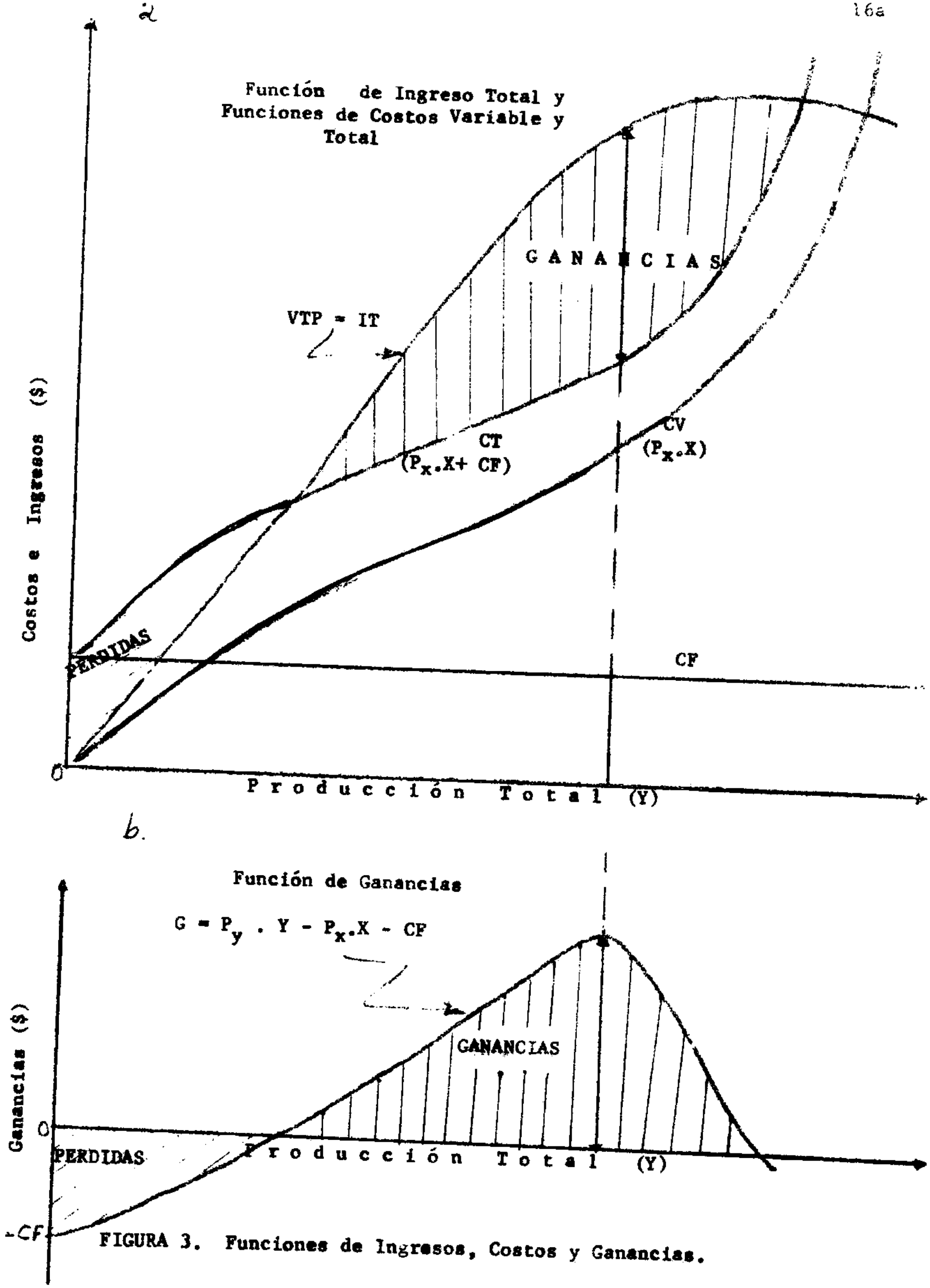

FIGURA 3. Funciones de Ingresos, Costos y Ganancias.

total (CT) representa utilidad si VTP >CT, y pérdidas si CT > VTP. La figura 3 (b) representa la función de ingreso neto (IN) o de utilidades, pudiéndo expresarse así:

$$IN = VTP - CT = VTP - (CV + CF)$$

El ingreso neto (IN) es una función del factor X debido a las siguientes relaciones: $Y = f(X)$

$VPT = Py.Y = Py.f(X)$

$CV = Px.X$ CF Constante.

Py = El Precio unitario del producto Y.

Px = Precio unitario del factor variable.

En el corto plazo, bajo competencia perfecta, Px y Py son constantes, o sea que no varían con la cantidad de insumo utilizado ni con la cantidad de producto producido. La función de ingreso neto, que es la diferencia entre las funciones: $IT = Py.Y$ y $CT = Px.X + CF$, tiene un máximo. El problema es averiguar la cantidad de X que maximiza esta nueva función.

Sabemos que el máximo de una función se obtiene al derivar la función y resolver la primera derivada para el valor de X que da a la derivada el valor de cero. Entonces:

Se tiene que $IN = Py.\ Y - Px.X - CF$

por lo tanto,

$$\frac{d(IN)}{DX} = Py. \quad \frac{dy}{dx} - Px$$

y cuando $\frac{d(IN)}{dX} = 0$ se está maximizando el ingreso neto;

Entonces:

$$Py. \frac{dY}{dX} = Px$$

o también, $\frac{dY}{dX} = \frac{Px}{Py}$

La última relación indica que para maximizar utilidades, cuando se tiene una relación de factor-producto, la primera derivada de la función de producción (dY/dX), o Producto Físico Marginal de X, debe ser igual a la relación entre el precio del insumo y el precio del producto (Px/Py).

Para asegurar que estas relaciones resulten en utilidades máximas (y no mínimas) es necesario estar operando en la Etapa II de la producción, es decir, que el producto físico marginal sea positivo y esté disminuyendo. La prueba es fácil: si la segunda derivada de la función de ingreso neto (IN) o utilidad (U) respecto a X (d^2U/dX^2) es positiva, quiere decir que IN tiene un mínimo en lugar de un máximo (para el valor de X considerado); y cuando $d^2U/dX^2 = d^2Y/dx^2$ es negativo, dY/dX está dismunuyendo. Además, dY/dX, producto físico marginal para X, tiene que ser positiva para satisfacer la ecuación dY/dX = Px/Py, debido a que los precios no pueden ser negativos.

Si existe la posibilidad de utilizar el factor variable X_1, en la obtención de más de un producto, el nivel óptimo de uso de este factor se determina aplicando el mismo principio anterior, o sea:

Yi = Producto i = 1,2,...,m

X_1 = Factor variable

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = \frac{Px_1}{Py_1} \quad ; \quad PFMx_1,Y_1 \quad . \quad Py_1 = Px_1$$

$$-\frac{\partial Y_2}{\partial X_1} = \frac{Px_1}{Py_2} \quad ; \quad PFMx_1,y_2 \quad . \quad Py_2 = Px_1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial Y_m}{\partial X_1} = \frac{Px_1}{Pym} \quad ; \quad PFMx_1,y_m, \quad . \quad Pym = Px_1$$

El valor delproducto marginal es igual al producto físico marginal del insumo multiplicado por el precio unitario del producto, es decir, $PFM_x 1_{y1}$. $Py_1 = VPMx_1y_1$.

Por lo tanto,

$$VPM_{X1}y_1 = Px_1 \quad ; \quad \frac{VPM \quad xL,Y1}{Px_1} = 1$$

$$VPMx_1,y_2 = Px_1 \quad ; \quad \frac{VPMx1,Y_2}{px1} = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$VPMx_1y_m = Px_1 \quad ; \quad \frac{VPMx_1,y_m}{Px_1} = 1$$

En consecuencia, el nivel de uso óptimo de un factor variable en la obtención de varios productos está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{VPMx_1,y_1}{Px_1} = \frac{VPMx_1,y_2}{Px_1} = \dots = \frac{VPM \; x_1,y_m}{Px_1} = 1$$

4.1.2. Ejemplo Práctico sobre la relación factor-producto.

Con el fín de ilustrar los conceptos anteriores se discute un ejemplo real, donde la función de producción de trigo para ocho ensayos de de fertilización con nitrógeno (N) y fósforo (P), es como sigue:

$$Y = 2359.58 + 12.03502P - 0.02929\ P^2$$

Esta función de producción indica que el trigo solamente respondió significativamente a la aplicación de fósforo.

Derivando Y con respecto a P, se tiene la primera derivada (dY/dP), es decir el producto físico marginal del factor variable P (fósforo) en la producción de trigo.

Entonces, $\frac{dY}{dP} = 12.03502 - o.05858P$

Haciendo $\frac{dY}{dP} =$ 0, se obtiene el nivel de P (en Kg/ha)

O sea: $\frac{dY}{dP} = 12.03502 - 0.05858P = 0$

Es decir: $P = \frac{12.03502}{0.05858} = 205.45$ Kg/ha.

Reemplazando este nivel de P (205.45 Kg) en la función original, se calcula la producción máxima, así:

$$Y\ máx. = 2359.58 + 12.03502\ (205.45) - 0.02929\ (205.45)^2$$

$$= 2359.58 + 2472.59 - 1236,32 = 3595.85.$$

o sea que Y máx. = 3595,85 kg. de trigo/ha.

La producción óptima se determina calculando el nivel óptimo de uso del factor P. Esto se consigue haciendo $\frac{dY}{dP} = \frac{P_p}{Py}$

Si P_p = (precio de un kilogramo de P) = \$26.10

Py = (precio de un kilogramo de trigo) - \$7.00

se tendría que:

$$\frac{dY}{dP} = 12.03502 - 0.05858 \quad P = \frac{\$26.10}{7.00} = 3.72857$$

$$P = \frac{12.03502 - 3.72857}{0.05858} = 141.80 \text{ kg/ha.}$$

Reemplazando este valor de P en la ecuación original, se tiene que

$$Y \text{ ópt.} = 2359{,}58 + 12{,}03502\ (141{,}80) - 0{,}02929\ (141{,}80)^2$$

$$= 2359{,}58 + 1706.57 - 588{,}94$$

$$Y \text{ ópt.} = 3477\ 21 \text{ kg de trigo/ha.}$$

El ingreso bruto total (ó valor de la producción total) se calcula así:

$$VPT = Y.\ Py$$

$$VPT = 3.477.21\ (\$7.00) = \$24.340.47$$

$$VPT = 24.340.47$$

Si se asume un costo fijo de producción por héctarea de \$8.000.oo, se puede determinar el ingreso neto (IN) por hectárea, así:

$$IN = VTP - \text{Costo Total} = VPT - (\text{Costo Fijo} + \text{Costo Variables}).$$

$$IN = Y.Py - (CF + P.P_p).$$

$$= 24340.47 - (8.000 + 141.80 \times 26.10)$$

$$IN = \$12.639.49/\text{ha.}$$

Este valor indica el máximo ingreso neto por hectárea que podría obtenerse dada esa función de producción y los precios por kilogramos en el mercado para Y y P, si los otros costos de producción por hectárea de trigo son de \$8.000. Al cambiar los precios unitarios de Y y P, resultará un ingres neto diferente ( ).

4.2. ANALISIS PARA DOS FACTORES VARIABLES.

4.2.1. Relaciones Factor-Factor

La relación factor-producto considera solamente un insumo variable (X_1) en la obtención de un producto. Sin embargo, cuando se utilizan dos insumos variables X_1 y X_2, para obtener un producto Y_1, se tiene la relación factor-factor que puede expresarse así: ( ).

$$Y_1 = f(X_1, X_2/X_3, \ldots, X_n)$$

En este caso deben estimarse las relaciones de sustitución entre X_1 y X_2 y la combinación óptima de los mismos.

Denominando Y_1 = El producto a obtener

X_1, X_2 = Los factores variables.

Setiene que:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = \frac{Px_1}{Py1} \quad \underline{1}/$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} = \frac{Px_2}{Py_2}$$

$$PFM_{xiyi} \cdot Py_1 = Px_1; \qquad \frac{\Delta Y}{\Delta X_1} \cdot Py_1 = Px_1$$

$$PFMx_2y_1 \cdot Py_1 = Px_2; \qquad \frac{\Delta Y}{\Delta X2} \cdot Py_1 = Px_2$$

$$\frac{\frac{\Delta Y}{\Delta X_1} \cdot Py_1}{\frac{\Delta Y}{\Delta X_2} \cdot Py_1} = \frac{Px_1}{Px_2} \quad ; \quad \frac{\Delta X_2}{\Delta X_1} = \frac{P_{x1}}{Px_2}$$

1/ El símbolo ∂ indica derivación parcial.

La expresión $\frac{\partial X_2}{\partial X_1}$ se conoce como la "tasa marginal de sustitución" ($TMSx_1x_2$) entre los factores X_1 y X_2. La combinación óptima de X_1 y X_2 en la obtención de Y_1 se obtiene cuando $TMSx_1 \cdot x_2$ es igual a la relación inversa de sus precios.

Gráficamente la relación factor-factor se representa por medio de las llamadas líneas de isoproducto o isocuantas, cada una de las cuales indica un nivel dado de producción y muestra las posibles combinaciones de X_1 y X_2 para obtener dicho nivel. Si los precios de los factores variables son Px_1 y Px_2, una línea de isocostos muestra las posibles combinaciones de esos factores que pueden adquirirse con una cantidad dada de dinero.

La figura 4 presenta curvas de isocuantas y de isocostos, a través de las cuales se determinará la combinación óptima de X_1 y X_2 para obtener la cantidad de producto.

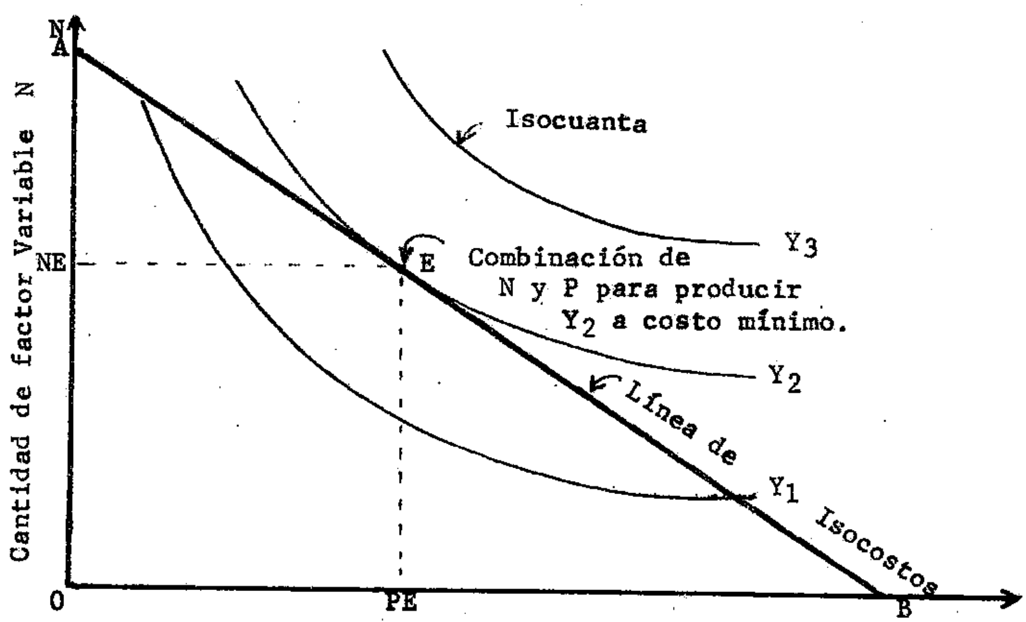

FIGURA 4. Relación Factor - Factor.

La expresión $\frac{\Delta X_2}{\Delta X_1}$ es la pendiente de la curva de isocuanta y $\frac{Px_1}{Px_2}$ representa la pendiente de la línea de isocosto. Por lo tanto, la igualdad $\frac{\Delta X_2}{\Delta X_1} = \frac{Px_1}{Px_2}$, corresponde al punto de tangencia entre la línea de isocosto y la curva de isocuanta.

. Ejemplo práctico sobre las Relaciones Factor-Factor.

En base a los resultados de una prueba regional de fertilización en trigo, se obtuvo la siguiente función de producción:

$$Y = 4629.35 + 12.11625\ N + 9.98750\ P - 0.15840N^2 - 0.04054P^2 + 0.075985NP \quad (1)$$

Donde:

Y = Producción obtenida/ha.

N = Nitrógeno aplicado/ha., y

P = Fósforo aplicado/ha.

Derivando Y con respecto a N y P se tiene:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta N} = 12.11625 - 0.31680N + 0.07598P \quad (2)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta P} = 9.98750 - 0.08108P + 0.07598N \quad (3)$$

Al igualar las ecuacinnes (2) y (3) a cero y resolverlas simultáneamente, se obtienen los niveles de N y P que maximizan la producción física total de trigo por hectárea.

Para ello se multiplica la ecuación (2) por 0.07598 y la (3) por 0.31680, con el fín de eliminar la incógnita N y luego despejar para P, como se indica a continuación:

$(12.11625 - 0.31680N + 0.07598P = 0)\ (0.07598)$

$(\ 9.98750 - 0.08108P + 0.07598N = 0)\ (0.31680)$

La ecuación (2) se transforma en:

$0.9205 + 0.00577\ P = 0.$

La ecuación (3) se transforma en:

$3.16404 - 0.02569P = 0$ (5)

Sumando (4) y (5) se tiene que:

$0.01992P = 4.08463$, de donde $P = 205.05$ kg/ha.

Reemplazando este valor de P en la ecuación (2) se obtiene el valor de N = 87.42 kg/ha.

Los niveles de N (=87.42 kg/ha) y P (=205.05 kg/ha) así calculados, se reemplazan en la ecuación (1), obteniendose Y = 6183.41 kg/de trigo/ha.

Para calcular el nivel óptimo de uso de los factores, es necesario conocer el precio del producto (P_y = \$7.00/kg) y los precios del nitrógeno (P_n = \$15.22/kg) y del fósforo (P_p = \$26.10/kg.).

Igualando $\frac{\partial Y}{\partial N} = \frac{P_n}{P_y}$

$$\frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{P_p}{P_y}$$

Es decir,

$$12.11625 - 0.31680N + 0.07598P = \frac{15.22}{7} = 2.17429 \quad (6)$$

$$9.98750 - 0.08108P + 0.07598N = \frac{26.10}{7} = 3.72857 \quad (7)$$

Resolviendo simultáneamenta las ecuaciones (6) y (7) se encuentran los niveles óptimos de uso de N y P, es decir, 64.35 kg/ha y 137.46 kg/ha. respectivamente.

El nivel óptimo de producción (6032.06 kg/ha) se obtiene reemplazando estos valores en la ecuación (1).

El ingreso neto o ganancias se calcula así:

$$IN = VPT - CT = VPT - (CF + CV)$$

$$IN = PyY - (CP + N.Pn + P.\ P_p)$$

Si los costos fijos por hectárea se estiman en \$8.000, entonces,

$$IN = 6032.06 \times 7.00 - (8000 + 64.35 \times 15.22) + 137.46 \times 26.10)$$

$$= 42224.42 - 12567.11$$

$$IN = \$29657.31.$$

En la Tabla 1 se ilustran las diferentes combinaciones de Nitrógeno (N) y Fósforo (P), en la producción de cinco niveles dados de trigo, a partir de la función:

$$Y = 1467.76 + 13.9915 + 17.2708P - 0.14462N^2 - 0.04881P^2 + 0.0410NP.$$

La máxima producción física de trigo, así como la producción óptima se determinan por derivación parcial de la función de producción Y = f(N,P), en la forma como se explicó anteriormente. Sin embargo para obtener niveles de producción preestablecidos, es posible determinar las combinaciones de N y P que maximicen el ingreso neto (o que minimicen los costos de producción) a partir de la misma función. Este caso se ilustra mediante el uso de isocuantas o curvas de iso-producto. Una isocuanta representa las diferentes combinaciones de dos factores variables que permiten obtener un mismo nivel de producción.

Para la segunda Etapa de la producción (que es la relevante para el análisis económico), la pendiente de la isocuanta representa la sustitución entre los factores de producción considerados. A este tipo de relación se denomina como tasa marginal de sustitución entre factores ($TMS_{N.P.}$)

Los datos de la Tabla 1 se representan en la Figura 5 . En esta gráfica se han representado las isocuantas correspondientes a cinco niveles de producción de trigo predeterminados; por consiguiente, la pendiente de cada curva de isoproducto indica la tasa marginal de sustitución de N por P ($TMS_{N.P.}$).

.1.2. Procedimiento matemático para la determinación de isocuantas.

Con base en la definición de isocuantas y en la función de producción original, es posible determinar las ecuaciones que representan las isocuantas. Para ello, se fijan niveles de producción de trigo y se expresa la variable nitrógeno como una función de las variables fósforo y producción de trigo. Este es un procedimiento iterativo en el cual se obtienen pares d de valores para N y P, los cuales son representados en la Figura 13, y que al ser unidos por una curva muestran la isocuanta calculada.

Función Original:

$$Y = 1467.76 + 13.9915N + 17.2708P - 0.14462N^2 - 0.04818P^2 + 0.04107NP \quad (1).$$

Función para las isocuantas:

$N = f\ (P_y, \hat{Y})$

Donde N = Cantidad de Nitrógeno en kg/ha.

P = Niveles seleccionados de Fósforo en kg/ha.

$\hat{Y}$ = Nivel seleccionado de Producción de Trigo en kgs/ha.

TABLA 1. Relación Factor-Factor. Ejemplo de combinaciones de Nitrógeno y Fósforo para producir niveles dados de trigo, en la Sabana de Bogotá.

NIVELES DE N y P EN LA PRODUCCION DE CINCO NIVELES DE TRIGO					
2.600 kg.		3.000 kgs.	3.400 kgs.	3.800 kgs.	3854.41kg.
kg.de P	kg.de N	kg. de N	Kgs.de N	kgs.de N	kgs.de N
0					
40					
50	45.76				
55	35.56				
60	28.28				
70		57.99			
80	9.10	45.49			
113			59.76		
120	-12.05	8.55	43.96		
160		- 5.76	17.48		
179				59.09	
180				57.56	
185				52.77	
190				49.88	
195			9.46		
200					78.57
212.68					
220					
240			10.96		

A partir de (1), se despeja N como función de P y $\hat{Y}$.

Reordenando términos:

$$-0.04818P^2 + 17.2708P + 0.04107NP - 0.14462N^2 + 13.9915N + 1467.76 - \hat{Y} = 0$$

$$-0.14462N^2 + (13.9915 + 0.04107P)\,N - 0.04818P^2 + 17.2708P + 1467.76 - \hat{Y} = 0$$

Esta función es similar a la ecuación de la forma algebraica:

$$X^2 + b\,X + c = 0$$

que puede ser resuelta para X mediante la formula:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

En la función analizada:

$a = 0.14462$

$b = (13.9915 + 0.041077)$

$c = (-0.04818P^2 + 17.2708P + 1467.76 - \hat{Y})$

Por lo tanto:

$$N = \frac{-(13.9915+0.04107P) \pm \sqrt{(13.9915+0.0410P)^2 - 4(-0.14462)(-0.04818P^2+17.2708P+1467.76-Y)}}{2(-0.14462)}$$

El paso siguiente es:

a. Darle un valor a $\hat{Y}$ que esté comprendido en el rango de niveles mínimo y máximo de producción observados en el campo.

b. Dar valores a N y resolver la ecuación.

El procedimiento se repite para cada una de las isocuantas que se desea determinar. Los pares de valores para N y P son utilizados para representar gráficamente las curvas de isoproducto (ver Figura 5).

La Etapa racional de producción, para este ejemplo, se encontrará delimitada por las "líneas frontera". Estas líneas se determinan matemáticamente

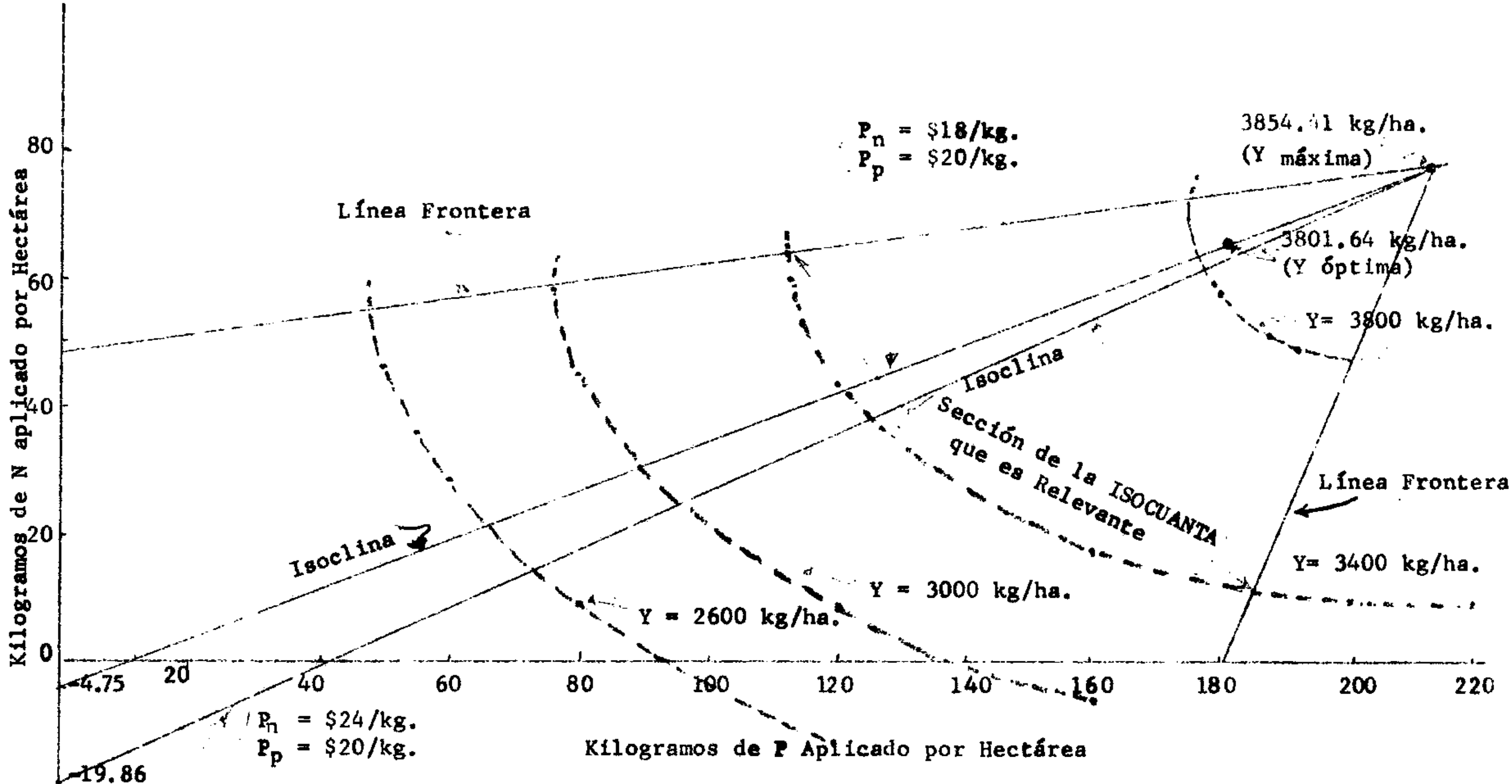

FIGURA 13. Relación Factor - Factor. Ejemplo de Sustitución entre Factores. Producción de Trigo para Diferentes Niveles de Nitrógeno y Fósforo en la Sabana de Bogotá.

igualando las producciones marginales de N y P a cero, y resolviendo luego para un factor en función del otro, así:

para TMS = a,

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = 13.99 - 0.29N + 0.041P = 0$$

de donde,

$N = 48.24 + 0.1414P.$

Para TMS = 0.

$$\frac{\partial Y}{\partial P} = 17.27 - 0.096P - 0.041N = 0$$

de donde,

$P = 179.9 + 0.4271N.$

Gráficamente se puede determinar la combinación de insumos que presenta los mismos costos de producción para un nivel dado de producción. El método consiste en encontrar los puntos donde la relación de precios de los dos factores variables considerados es igual a la Tasa Marginal de Sustitución. Esto equivale a representar la relación de precios por una línea recta la cual debe ser tangente a la isocuanta en el punto donde la pendiente de la isocuanta (que es igual a la $TMS_{n.p}$) es igual a la pendiente de la línea que representa la relación de precios. La línea que une los puntos de tangencia para una determinada relación de precios se conoce con el nombre de isoclina, y está definida por la función:

$$\frac{\dfrac{\partial Y}{\partial N}}{\dfrac{\partial Y}{\partial P}} = \frac{\partial P}{\partial N} = \frac{13.99 - 0.29\ N + 0.041\ P}{17.27 - 0.096P + 0.041\ N} = \frac{P_n}{P_p}$$

Esta línea recibe el nombre de isoclina, debido a que tiene una pendiente constante (Ver Figura 5).

Es posible representar muchas isoclinas, sobre el gráfico que ilustra las isocuantas. Cada isoclina representa una combinación específica de precios de los dos factores variables (P_n y P_p). Debido a que el criterio del productor es el de optimizar el nivel de producción a obtener de acuerdo con los recursos disponibles, se acostumbra denominar a la isoclina (Línea de combinación de mínimos costos)" camino o ruta de expansión (ver Figura). Se puede observar que sobre el "camino de expansión" escogido (Línea de combinación de costo mínimo cuando P_n = \$18/kg. y P_p = \$20/kg), se encuentra el punto de máximas ganancias para la función analizada.

Así tenemos que para

P_n = \$18/kg, y

P_p = \$20/kg.

$N = -4.75068 + 0.38972P.$

Si ocurre un cambio en los precios de N (=Pn = \$24/kg) y P (Pp= \$20/kg), se tiene una nueva isoclina definida por la ecuación:

$N = -19.86 + 0.46049P.$

Análisis para n Factores Variables.

Si se utilizan más de dos factores variables en la obtención del producto Y_1, su nivel óptimo de producción esta dado por las siguientes expresiones:

$$PFM_{x1y1} \cdot P_{y1} = P_{x1} \quad ; \quad VPM_{x1y1} = P_{x1}$$

$$PFM_{x2y1} \cdot P_{y1} = P_{x2} \quad ; \quad VPM_{x2y1} = P_{x2}$$

$$\vdots$$

$$PFM_{xny1} \cdot P_{y1} = P_{xn} \quad ; \quad VPM_{xny1} = P_{xn}$$

Dividiendo por P_{x1} , P_{x2} .... P_{xn} respectivamente, se obtiene:

$$\frac{VPM_{x1y1}}{P_{x1}} = 1$$

$$\frac{VPM_{x2y1}}{P_{x2}} = 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{VPM_{xny1}}{P_{xn}} = 1$$

En consecuencia: $\frac{VPM_{x1yi}}{P_{x1}} = \frac{VPM_{x2y1}}{P_{x2}} = \ldots . \frac{VPM_{x2y1}}{P_{xn}} = 1$

Determinación de la Pendiente Promedio en el Modelo Continuo.

En el modelo continuo se determinó la pendiente promedia para cada nutrimento en la función, utilizando el siguiente procedimiento:

a. Hallar el incremento en rendimiento debido a cada nutrimento (ΔY_n, ΔY_p). Para esto, se parte del nivel óptimo de aplicación del nutrimento determinado a partir de la función de producción. Este nivel óptimo se multiplica por el coeficiente para el término líneal y a esta cantidad se le resta el producto obtenido al multiplicar el nivel óptimo de nutrimento elevado al cuadrado por el coeficiente del término cuadrático.

b. La pendiente para el nivel óptimo de nutrimento se halla dividiendo el incremento en producción (ΔYn, ΔYp) calculada en a) por el nivel de aplicación del nutrimento respectivo.

Si la función contiene el término de la interacción (NP), se multipli ca su coeficiente por los niveles óptimos de los dos nutrimentos y se asigna un 50 por ciento de este producto al incremento en rendimiento debido a cada uno de los nutrimentos considerados*/.

a. EJEMPLO 1: Respuesta a un solo nutrimento (P):

$Y = 2359.58 + 12.03502P - 0.02929P^2$.

P ópt. = 141.8 kg/ha.

Reemplazando P:

12.03502	* 141.8	1706.5658
-0.02929	* $(141.8)^2$	-588.9410

Incremento en Rendimiento = Yp = 1117.6248

Pendiente promedio para P $= bp = \frac{Yp}{P\ \text{ópt.}} = \frac{1117.6248}{141.8} = 7.8817$

bp = 7.88 kg. de trigo/kg. de P aplicado.

b. EJEMPLO 2: Respuesta a dos nutrimentos (N y P), sin interacción:

$Y = 2112.63 + 18.61403N + 14.69513P - 0.26001N^2 - 0.03402P^2$.

N ópt. = 31.61 kg/ha.

P ópt. = 161.18 kg/ha.

Reemplazando a N:

18.61403	* 31.61	=	588.38948
-0.26001	* $(31.61)^2$	=	-259.79993

Incremento en rendimiento Yn = 328.58955

Pendiente promedio para N $= b_n = \frac{Yn}{N\ \text{ópt.}} = \frac{328.58955}{31.61} = 10.3951$

bn = 10.40 kg. de trigo/kg. de N aplicado.

Reemplazando a P:

14.69513 * 161.18 2368.5610

-0.03402 * $(161.18)^2$ -838.8053

Incremento en rendimiento = ΔYp = 1484.7557

Pendiente Promedio para P = $bp = \frac{\Delta Yp}{p\ \text{ópt.}} = \frac{1484.7557}{161.18} = 9.2118$

bp = 9.21 kg. de trigo/kg. de P aplicado.

c. EJEMPLO 3: Respuesta a dos nutrimentos (N y P), con interacción (NP):

$Y = 4629.35 + 12.11625N + 9.98750P - 0.15840N^2 = 0.04054P^2 + 0.07598NP$

N ópt. = 64.35 kg/ha.

P ópt. = 137.46 kg/ha.

Reemplazando a N :

12.11625 * 64.35 779.68068

-015840 * $(64.35)^2$ -655.92212

0.07598 * 64.35* 137.46* 0.5 = 336.04248

Incremento en rendimiento = Yn = 459.80104

Pendiente Promedio para N = $bn = \frac{\Delta Yn}{N\ \text{ópt.}} = \frac{459.801.04}{64.35} = 7.1453$

bn = 7.15 kg. de trigo/kg. de N aplicado.

Reemplazando a P:

9.98750 * 137.46 1372.8817

0.04054 * $(137.46)^2$ -766.0135

0.07598 * 137.46 * 64.35 * 0.5 = 366.0425

Incremento en rendimiento = ΔYp = 942.9107

Pendiente promedio para P = $bp = \frac{\Delta Y_p}{p\ \text{ópt.}}$

$bp = \frac{942.9107}{137.46} = 6.85953$

bp = 6.86 kg. de trigo/ha. de P aplicado.

La función de respuesta en el Modelo Discontinuo y sus Propiedades.

Rendimiento con el Nutrimento al Mínimo.

Se asume que cada suelo tiene algún nivel de disponibilidad para cada nutrimento, y que dicho nivel marca el límite más bajo de la función de respuesta, que se denomina comúnmente como el "intercepto" sobre el eje "y" u "ordenada", y corresponde al punto de origen desde el cual se mide la respuesta. Según la ley del Mínimo de Liebig, el nutrimento más deficiente limitará el rendimiento, de ahí que se denomine "Rendimiento con el Nutrimento al Mínimo", y por consiguiente la respuesta del cultivo a dicho nutrimento es el punto de partida. Este rendimiento se refiere a la respuesta a un nutrimento dado bajo condiciones específicas (24).

Rendimiento Máximo Estable.

El limite superior donde termina la función de la respuesta a los nutrimentos aplicados, es el máximo donde el rendimiento se estabiliza cuando el nutrimento bajo estudio deja de ser el principal factor limitante. Como el rendimiento máximo para una situación dada no es el máximo absoluto para todas las condiciones, sino para un conjunto específico de circunstancias dentro de un experimento, se usa el término "Rendimiento Máximo Estable o "Plateau", en vez de rendimiento Máximo. Por consiguiente, el rendimiento máximo estable implica que el rendimiento se encuentra en el punto más elevado dadas ciertas condiciones específicas y que permanece constante para cierto rango de adiciones del nutrimento bajo estudio (24).

Rendimiento Relativo.

También denominado "porcentaje de rendimiento". Es el rendimiento ob tenido sin aplicación del nutrimento bajo estudio expresado como un porcentaje del rendimiento máximo. El rendimiento relativo es una medida de la respuesta del rendimiento a un sólo nutrimento cuando los otros con agregados en cantidades adecuadas, y las otras variables de sitio se mantienen constantes.

El rendimiento relativo para cada nutrimento se calcula dividiendo el "rendimiento con el nutrimento al mínimo" por el "rendimiento máximo estable", así:

$$\text{Rendimiento Relativo (X)} = \frac{\text{Rendimiento con el nutrimento X al mínimo}}{\text{Rendimiento máximo estable para X}}$$

Cuando el rendimiento sin el nutrimento es bajo, comparado con el rendimiento máximo estable, es porque existe una respuesta alta del cultivo debida a la adición del nutrimento bajo estudio, y por consiguiente, el rendimiento relativo es bajo. Al contrario, un rendimiento relativo alto indica que el rendimiento con el nutriente al mínimo está muy cercano al máximo estable. En este caso se obtiene poca respuesta a la adición del nutriente bajo estudio (24).

Pendiente de la Respuesta.

Es la relación entre el aumento en rendimiento y la cantidad de nutrimento requerido para obtener tal aumento. Se presenta gráficamente uniendo el rendimiento umbral con el punto donde se inicia el rendimiento máximo estable. Para ello, se traza una línea recta que ofrezca el mejor ajuste para todos los puntos no incluídos en el rendimiento máximo estable. Matemáticamente se calcula así:

$$\text{Pendiente (b)} \quad \frac{\text{Rendimiento Máximo Estable - Rendimiento Umbral}}{\text{Kg. fertilizante necesarios para obtener el Rendimiento Máximo Estable.}}$$

Nivel Optimo de Nutrimento.

Es la cantidad de nutrimento necesaria para obtener el rendimiento máximo estable. En la gráfica se obtiene trazando una vertical desde el punto de inflexión de la curva de respuesta hasta el eje horizontal.

Forma general de la Ecuación de Respuesta o Ecuación Liebig.

La forma utilizada para la ecuación general de respuesta es:

Y = a + b X (Y máx. est./ X ópt).

donde:

Y = Rendimiento (kg/ha)

a = Rendimiento umbral (kg/ha)

b = Pendiente de la curva de respuesta

X = Nutrimento analizado (kg/ha)

Y máx.est. = Rendimiento máximo estable (kg/ha)

X ópt. = Nivel óptimo de nutrimento (kg/ha).

Cuando no hay respuesta, el término bX se omite pues la pendiente es igual a cero, y por consiguiente:

Y = Y máx.estable.

En la Figura 6 se representa gráficamente una función de respuesta determinada por el método discontinuo.

Procedimiento General para calcular Ecuaciones Liebig.

Estimación de Ecuaciones Individuales.

Para calcular ecuaciones de respuesta de un cultivo a la aplicación

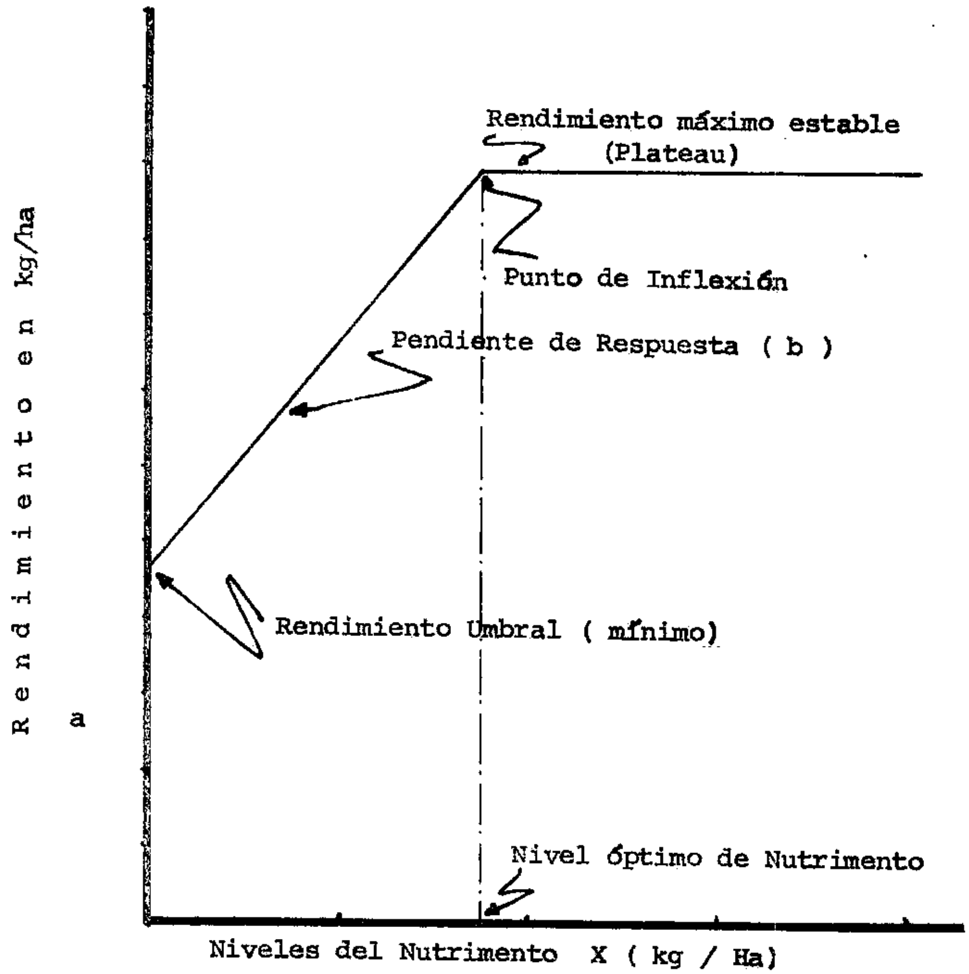

Figura 6. Representación de la Ecuación de Respuesta en el Modelo Discontinuo.

de fertilizante, utilizando el modelo Liebig, se deben seguir ordenadamente las siguientes etapas que se explican a través de los resultados de un ensayo de fertilización en trigo.

ETAPA 1. Tabulación de los rendimientos obtenidos para cada uno de los tratamientos, dentro de cada ensayo. Es decir, que cada ensayo o prueba regional se analizará separadamente (ver Tabla 2).

TABLA 2. Resultados de un ensayo de fertilización en trigo en la Sabana de Bogotá. Ensayo 001, 1965 A.1/

No. del tratamiento	Tratamientos Kg/Ha. de :			REPLICACIONES Producción Trigo Kg/ha.				Total Kg.	Rendim. Promedio Kg/Ha.
	N	P	K	I	II	III	IV		
1	0	0	30	1262	1372	784	823	4241	1060
2	0	75	30	1474	1410	878	917	4679	1170
3	0	150	30	978	1395	1091	1069	4533	1133
4	0	225	30	1729	1555	1276	1182	5142	1436
5	30	0	30	721	520	1491	1113	3845	961
6	30	75	30	1506	1822	1583	1789	6700	1675
7	30	150	30	2449	2844	1774	1751	8818	2205
8	30	225	30	1152	1395	1260	1774	5581	1395
9	60	0	30	1596	1368	1241	997	5202	1301
10	60	75	30	1140	1962	1128	1441	5671	1418
11	60	150	30	2408	2055	1168	1411	7042	1761
12	60	225	30	1482	2235	1181	1411	6309	1577

1/ Análisis de Suelos : P = 24.5 ppm. MO = 4.0 % pH = 4.8

Se suman los rendimientos de las replicaciones correspondiente a cada tratamiento; este total se divide por el número de replicaciones para obtener así el rendimiento promedio del cultivo en kilogramos por hectárea.

ETAPA 2. Se codifican los tratamientos del ensayo en la forma como aparece en la Tabla .

TABLA 3. Codificación de los tratamientos del Ensayo ØØ1.

No. del tratamiento	TRATAMIENTOS 1/ N	TRATAMIENTOS 1/ P	Código tratamiento N	Código tratamiento P	Rendimiento Promedio (Kg/ha.)
1	0	0	0	0	1060
2	0	75	0	1	1170
3	0	150	0	2	1133
4	0	225	0	3	1436
5	30	0	1	0	961
6	30	75	1	1	1675
7	30	150	1	2	2205
8	30	225	1	3	1395
9	60	0	2	0	1301
10	60	75	2	1	1418
11	60	150	2	2	1761
12	60	225	2	3	1577

1/ Como el Potasio fue aplicado uniformante en la dosis de 30 Kg/ha., no se tuvo en cuenta para el análisis en el presente estudio, por cuanto que una sola dosis no es relevante para dicho análisis.

El sistema de código utilizado en este estudio es como sigue:

Para N = 0 Kg/ha., su código es = 0

Para N = 30 " " " " = 1

Para N = 60 " " " " = 2

Para N = 90 " " " " = 3

Para P = 0 " " " " = 0

Para P = 75 " " " " = 1

Para P = 150 " " " " = 2

Para P = 225 " " " " = 3

Al frente de cada tratamiento codificado se coloca el rendimiento promedio para las replicaciones del ensayo. Si el ensayo comprende además tratamientos complementarios o adicionales, los resultados de estos tratamientos se omiten.

ETAPA 3. Se calculan los rendimientos promedios correspondientes a cada uno de los niveles de los nutrimentos respectivos. Así por ejemplo, para N = 0 se suman los rendimientos de los tratamientos en los cuales se utilizó el nivel cero de nitrógeno, y se divide esta suma por el número de tratamientos con N = 0; de igual manera se procede para el fósforo y el potasio si es del caso, en la forma como se detalla a continuación:

$$N_o : \frac{1060 + 1170 + 1133 + 1436}{4} = 1.200$$

$$N_1 : \frac{961 + 1675 + 2205 + 1395}{4} = 1.559$$

$$N_2 : \frac{1301 + 1418 + 1761 + 1577}{4} = 1.514$$

$$P_o : \frac{1060 + 961 + 1301}{3} = 1107$$

$$P_1 : \frac{1170 + 1675 + 1418}{3} = 1421$$

$$P_2 : \frac{1333 + 2205 + 1761}{3} = 1700$$

$$P_3 : \frac{1436 + 1395 + 1577}{3} = 1469$$

ETAPA 4. El siguiente paso consiste en observar cuál de los rendimientos promedios para los nutrimentos al nivel de cero (No = 1200; Po = 1107) es el rendimiento promedio mínimo. En este paso se busca determinar el nutrimento que actúa como limitante para la respuesta del cultivo a otros nutrimentos.

Es decir, el rendimiento umbral para el nutrimento más limitante. El promedio mínimo, en este caso Po = 1107, se señala con el número 1 (uno) colocado a la izquiera de ese valor, separado por un guión. Este es el primer paso en la obtención de producciones mínimas (ver Tabla 3).

ETAPA 5. Una vez definido el rendimiento mínimo para uno de los nutrientes al nivel de cero (Po = 1107), se pasa a las columnas del código de tratamientos y se procede a tachar (eliminar) aquellos tratamientos del otro (u otros) nutrimento(s) que acompañen o que queden en la misma línea del nutrimento cuyo rendimiento promedio para el nivel cero resultó ser mínimo (Po = 1107). En otras palabras, los rendimientos correspondientes a las líneas donde se ha tachado o eliminado un tratamiento deben salir del promedio y por consiguiente tales promedios deben recalcularse para obtener el nuevo promedio ya corregido. Siguiendo el ejemplo, se tiene que el fósforo (P) al nivel cero (Po) da como resultado el rendimiento mínimo, es decir, que para este ensayo el P es el nutrimento más limitante, por consiguiente, se deben recalcular los respectivos rendimientos promedios para No, N_1 y N_2, (después de haber excluído el rendimiento con el tratamiento Po) por cuanto el P al nivel cero está limitando la manifestación libre de la respuesta del cultivo (trigo en este caso) a la aplicación de N_o, N_1 y N_2. Se puede observar que en la columna de tratamientos codificados se han tachado los N_o, N_1 y N_2 que contienen Po, quedando solamente los No que tienen P_1, P_2 y P_3, los N_1 con P_1, P_2 y P_3, y finalmente, los N_2 que tienen P_1, P_2 y P_3. Como se observa, los respectivos promedios de rendimientos iniciales para No, N_1 y N_2 se han tachado, colocando un uno a la derecha y separado por un guión; este número sirve como guía para indicar que dicho promedio fue corregido en el primer paso de ajuste de promedios. De esta manera el nuevo promedio (o promedio corregido) viene a ser como se presenta en la Tabla).

$$No = \frac{1170 + 1133 + 1436}{3} = 1246 \text{ (antes } No = 1200)$$

$$N_1 = \frac{1675 + 2205 + 1395}{3} = 1758 \text{ (antes } N_1 = 1559)$$

$$N_2 = \frac{1418 + 1761 + 1577}{3} = 1585 \text{ (antes } N_2 = 1514)$$

ETAPA 6. Una vez recalculados los rendimientos promedios en el primer paso, se señala con el número 2 (dos) a la izquierda aquel promedio para los niveles de N_o (en el ejemplo no se analiza el potasio) si uno de estos es el promedio inmediatamente superior respecto a P. En el ejemplo, este promedio corresponde a N_o = 1246. Este nivel No está acompañado o afectando los niveles P_1, P_2 y P_3, y por consiguiente se han eliminado los rendimientos para P_1, P_2 y P_3 asociados con No. En consecuencia se deben recalcular tales promedios. Obsérvese que se han tachado los correspondientes promedios iniciales y a su derecha, separado por un guión, se ha escrito el número 2 para indicar que han sido afectados por el segundo paso de rectificación de promedios (ver Tabla 4). Así se obtiene el nuevo promedio para P_1, P_2 y P_3.

$$P_1 = \frac{1675 + 1418}{2} = 1546.5 \text{ (se aproxima a 1547; antes 1421)}$$

$$P_2 = \frac{2205 + 1761}{2} = 1983 \text{ (antes 1700)}$$

$$P_3 = \frac{1395 + 1577}{2} = 1486 \text{ (antes 1469)}$$

TABLA 3. Presentación del Primer paso en la obtención de Rendimientos Promedios corregidos para Trigo, Ensayo ØØ1.

Código Tratam. N	Código Tratam. P	Rendimiento Promedio (Kg/ha)	Nivel de Tratamientos Codific. 1/	Corrección de rendimientos Promedios N	Corrección de rendimientos Promedios P
Ø	0	1060	0	1200-1	1-1107
0	1	1170		1246	
0	2	1133	1	1559-1	1421
0	3	1436		1758	
1	0	961	2	1514-1	1700
1	1	1675		1585	
1	2	2205	3		1469
1	3	1395			
2	0	1301			
2	1	1418			
2	2	1761			
2	3	1577			

1/ Este código indica el nivel de tratamiento para el nutrimento respectivo, el cual tiene el mismo significado de la Columna "Código Tratam. N P".

TABLA 4 . Presentación del Segundo Paso en la corrección de rendimientos promedio de Trigo.

Código Tratam. N	P	Rendimiento Promedio (kg/ha.)	Nivel de tratamientos Codific. [1]	Corrección de rendimientos Promedios N	P
Ø	0	1060	0	1200-1	1-1107
0	1	1170		2-1246	
0	2	1133			
0	3	1436			
1	0	961	1	1559-1	1421-2
1	1	1675		1758	3-1547
1	2	2205	2	1514-1	1700-2
1	3	1395		1585	1983
2	0	1301	3		1469-2
2	1	1418			
2	2	1761			
2	3	1577			

TABLA 5 . Presentación del tercer paso en la obtención de rendimientos promedio corregidos para trigo.

Código Tratam. N	Código Tratam. P	Rendimiento Promedio (Kg/ha.)	Nivel de Tratamientos Codific.	Corrección de rendimientos Promedios N	Corrección de rendimientos Promedios P
0	0	1060	0	1200-1	1-1107
0	1	1170		2-1246	
0	2	1133	1	1559-1	1421-2
0	3	1436		1758-3	3-1547
1	0	961		1800	
1	1	1675	2	1514-1	1700-2
1	2	2205		1585-3	1983
1	3	1395		1669	
2	0	1301	3		1469-2
2	1	1418			1486
2	2	1761			
2	3	1577			

ETAPA 7. Como en rendimiento promedio para P_1 (P_1 = 1547) es menor que el correspondiente a N_1 = 1758), entonces se toma a P_1 = 1547 como la siguiente producción mínima, señalándola con el número 3 a la izquierda, separada por un guión (ver Tabla 5). Lo anterior indica que el nivel P_1 de fósforo (P = 75 Kg. de P_2O_5 por hectárea) es más limitante que N_1 en la producción de trigo. Entonces se procede a eliminar del promedio para N_1 y N_2 aquellos tratamientos que tengan P_1. Entonces los nuevos promedios para N_1 y N_2 serán:

$$N_1 = \frac{2205 + 1395}{2} = 1800 \text{ (antes 1758)}$$

$$N_2 = \frac{1761 + 1577}{2} = 1669 \text{ (antes 1585)}$$

Estos nuevos promedios se anotan inmediatamente debajo del promedio anterior respectivo, el cual se ha tachado y a su vez se ha señalado con el número 3 a la derecha, separada por un guión, llegándose así al paso 3.

ETAPA 8. Si los promedios corregidos de rendimientos para los niveles de nutrimentos inmediatos continúan aumentando, entonces se busca aquel promedio que tenga su valor mínimo y se marca con el número 4 a la izquierda. En el ejemplo, tal promedio corresponde a N_1 = (N_1 = 1800), el cual es menor que P_2 (P_2 = 1983). Por lo tanto, se procede luego a tachar los promedios de rendimientos que para P que están asociados a N_1, es decir P_2 = 2205 y P_3 = 1395, quedando:

P_2 = 1761 $\qquad$ P_3 = 1577.

ETAPA 9. Como no hay más promedios ascendentes, entonces lo que debe hacerse ahora es obtener el rendimiento máximo estable. Este rendimiento máximo se consigue promediando los rendimientos correspondientes a N_1 y N_2, P_2 y P_3, así $\frac{N_1 + N_2}{2} = \frac{1800 + 1669}{2} = 1735$, es el "plateau" o máximo estable para la respuesta del trigo a la aplicación de N, el cual es un valor que está comprendido dentro de los promedios P_2 y P_3 (1761 y 1577), pero mucho más próximo a $P_2 = 1761$; por consiguiente 1735 es el rendimiento máximo estable común para los 2 nutrimentos (ver Tabla 6).

ETAPA 10. GRaficación. Una vez calculados los promedios de rendimientos mínimos para No y Po, así como los correspondientes promedios corregidos para N_1, N_2, P_1,P_2, y P_3, junto con el rendimiento máximo estable o "plateau", se procede a graficar estos promedios. La graficación consiste en colocar sobre un papel milimetrado los valores de los promedios corregidos (Y = Kg/ha) en el eje "Y" vrs. la dosis o niveles de nutrimentos para N, P y K, permitiendo ver así, en forma especial, la relación entre rendimientos y dosis (en código) para cada nutrimento.

En una hoja de papel milimetrado se trazan el eje "Y" (ordenada) y el eje "X" (abcisa) en forma perpendicular. El eje de las ordenadas corresponde a rendimiento del cultivo (en kg/ha), el eje X se toma para marcar las dosis del nutrimento respectivo (N, P ó K), codificados. Por consiguiente, cada gráfica debe ser el resultado de colocar el valor de la variable dependiente (Rendimiento = Y) correspondiente al nivel de tratamiento o dosis codificado del nutrimento respectivo (N, P ó K) que viene a ser la variable independiente.

TABLA **6.** Conclusión de los cálculos para rendimientos promedios corregidos y obtención del "Máximo Estable" o "Plateau".

Código Tratam. N	Código Tratam. P	Rendimiento Promedio (Kg/Ha.)	Nivel de Tratamientos Codific.	Corrección de rendimientos promedios N	Corrección de rendimientos promedios P
Ø	0	1060	0	1200-1	1-1107
0	1	1170		2-1246	
0	2	1133	1	1559-1	1421-2
0	3	1436		1758-3	3-1547
1	0	961		4-1800	
1	1	1675	2	1514-1	1700-2
1	2	2205		1585-3	1983-4
1	3	1395		1669	1761
2	0	1301	3		1469-2
2	1	1418			1486-4
2	2	1761			1577
2	3	1577			

$$\text{Rend. Máx. Est.} = \frac{1800 + 1669}{2} = 1735$$

Como en el ejemplo del ensayo de trigo que se viene discutiendo se tiene el rendimiento o respuesta del trigo a la aplicación de Nitrógeno (N) y fósforo (P), entonces en la hoja de papel milimetrado apareceran dos gráficas: la una será Kg. de trigo/ha. vrs. dosis de N en código; la otra será Kg. de trigo/ha. vrs. dosis de P en código. Ambas gráficas deben tener la misma escala para rendimiento pues se trata del mismo ensayo. Estas gráficas pueden hacerse en hojas separadas de papel milimetrado, cuidando de que tengan idénticas escalas para rendimiento (eje de las ordenadas ó "Y"). (Ver Figuras **7a** y **7b**).

La escala para el código del nivel del mismo nutrimento debe ser siempre igual con el fín de poder apreciar rápidamente la respuesta del cultivo al nutrimento para el grupo de ensayos.

Solo debe haber un "plateau" o rendimiento máximo estable para los nutrimentos considerados en cada ensayo.

Criterios para la Agrupación de Pruebas Regionales.

Con el fín de obtener ecuaciones promedio y generales de respuesta, se deben tener en cuenta varios criterios de agrupación de las pruebas. Entre estos se pueden utilizar los siguientes:

Determinación de niveles críticos de las características del suelo. Los pasos seguidos fueron:

a. Cálculo de los rendimiento relativos. Estos se obtienen dividiendo el rendimiento umbral por el rendimiento máximo estable. Por consiguiente esta cantidad es igual o inferior a uno.

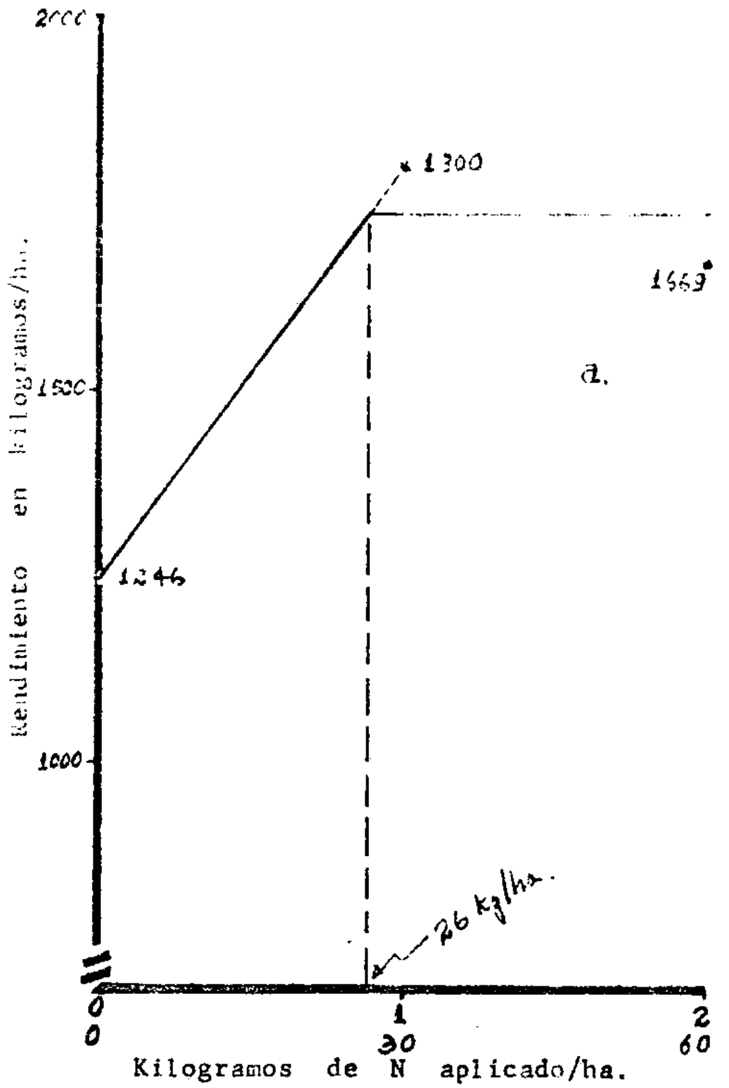

FIGURA 7a. Función de respuesta del Trigo a diferentes niveles de N, determinada por el Método Discontinuo. Ensayo 001 realizado en la Sabana de Bogotá, 1965 A.

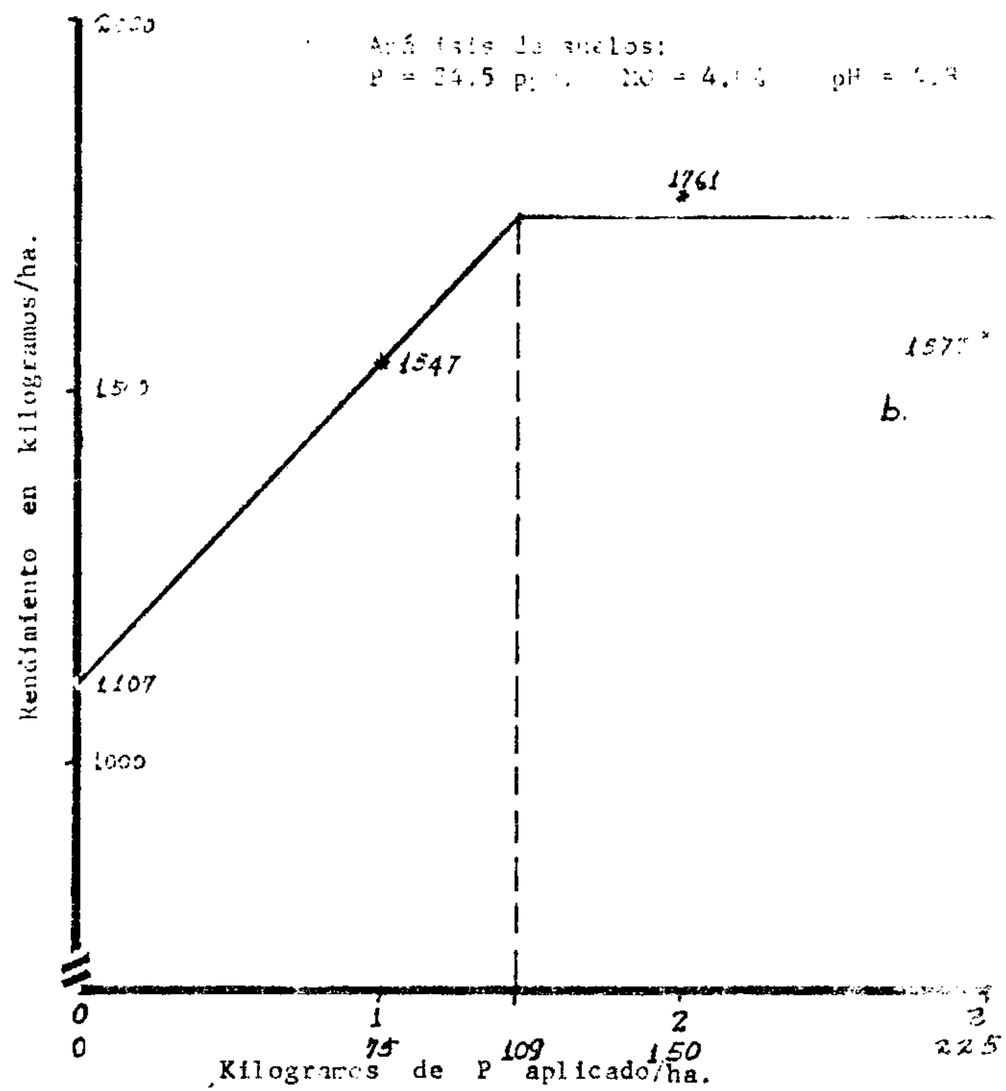

FIGURA 7b. Función de respuesta a diferentes niveles de P, determinada por el Método Discontinuo. Ensayo 001 realizado en la Sabana de Bogotá, 1965 A.

b. Representación gráfica de los rendimientos relativos vrs. características del suelo: Se utilizaron: pH del suelo, cantidad de materia órganica (%), Fósforo del suelo en ppm. determinado por el método de Bray II.

Categorías determinadas previamente de características del suelo. Por ejemplo: suelos altos o bajos en contenido de materia órganica; contenido de fósforo en el suelo, etc. Además se utilizaron otros criterios como año del experimento y la serie del suelo.

A partir de las ecuaciones generales se darán las recomendaciones sobre uso de fertilizantes. La recomendación se refiere principalmente al nivel de nutriente que de el mayor beneficio económico como resultado de su aplicación. Permite calcular las ganancias por hectárea o también el beneficio que produce cada peso invertido en fertilizante (relación beneficio-costo). (10).

El nivel crítico de Cate-Nelson.

"Desde un punto de vista práctico, es muy útil dividir los suelos en categorías de fertilidad de acuerdo con la probabilidad de que existe una respuesta beneficiosa en el rendimiento, tal como fue sugerido por Fitts (24)".

Procedimiento Gráfico.

"Cate y Nelson (24) demostraron que en un diagrama de rendimiento relativo vs. análisis de suelos para un nutriente en particular la configuración peculiar en la cual los puntos se dispersaban es por si sola muy útil. Ellos observaron que un diagrama de dispersión podía ser dividido esencialmente en dos poblaciones pudiéndose identificar así un nivel crítico del análisis delsuelo para un nutriente dado. La división de las dos poblaciones puede ser lograda gráficamente con la técnica basada esencialmente en el análisis no-paramétrico de asociación de Olmstead y Tukey (1947). En la técnica de Cate-Nelson se utiliza un plástico transparente sobrepuesto, el que tiene dibujados sobre sí dos líneas perpendiculares que forman cuatro cuadrantes que tienen aproximadamente el mismo tamaño relativo que los que se muestran en la Figura 8. El plástico se coloca sobre el gráfico de tal manera que el máximo número de puntos resulte en los cuadrantes positivos y el mínimo en los cuadrantes negativos. Una correlación perfecta colocaría todos los puntos en los cuadrantes positivos, obteniéndose así una situación que resulta en un modelo discontínuo. En esta posición, la línea horizontal del plástico sobrepuesto divide áquellos rendimientos relativos que muestran una respuesta alta al nutriente aplicado (valores bajos en el rendimiento relativo) de áquellos que indican una respuesta baja o ninguna respuesta (rendimientos relativos altos). Al mismo tiempo, la línea vertical identifica al nivel crítico del análisis del suelo el que divide las dos poblaciones entre valores altos y bajos de fertilidad del suelo. El resultado final es que se identifican dos categorías distintas de suelo-cultivo en cada representación gráfica de rendimiento relativo, cada una diferiendo en la clase de respuesta que se obtiene. Debajo del nivel crítico se puede esperar una respuesta alta en el rendimiento del cultivo con adiciones adecuadas del nutriente bajo estudio. Arriba del nivel crítico se espera una respuesta baja o ninguna respuesta.

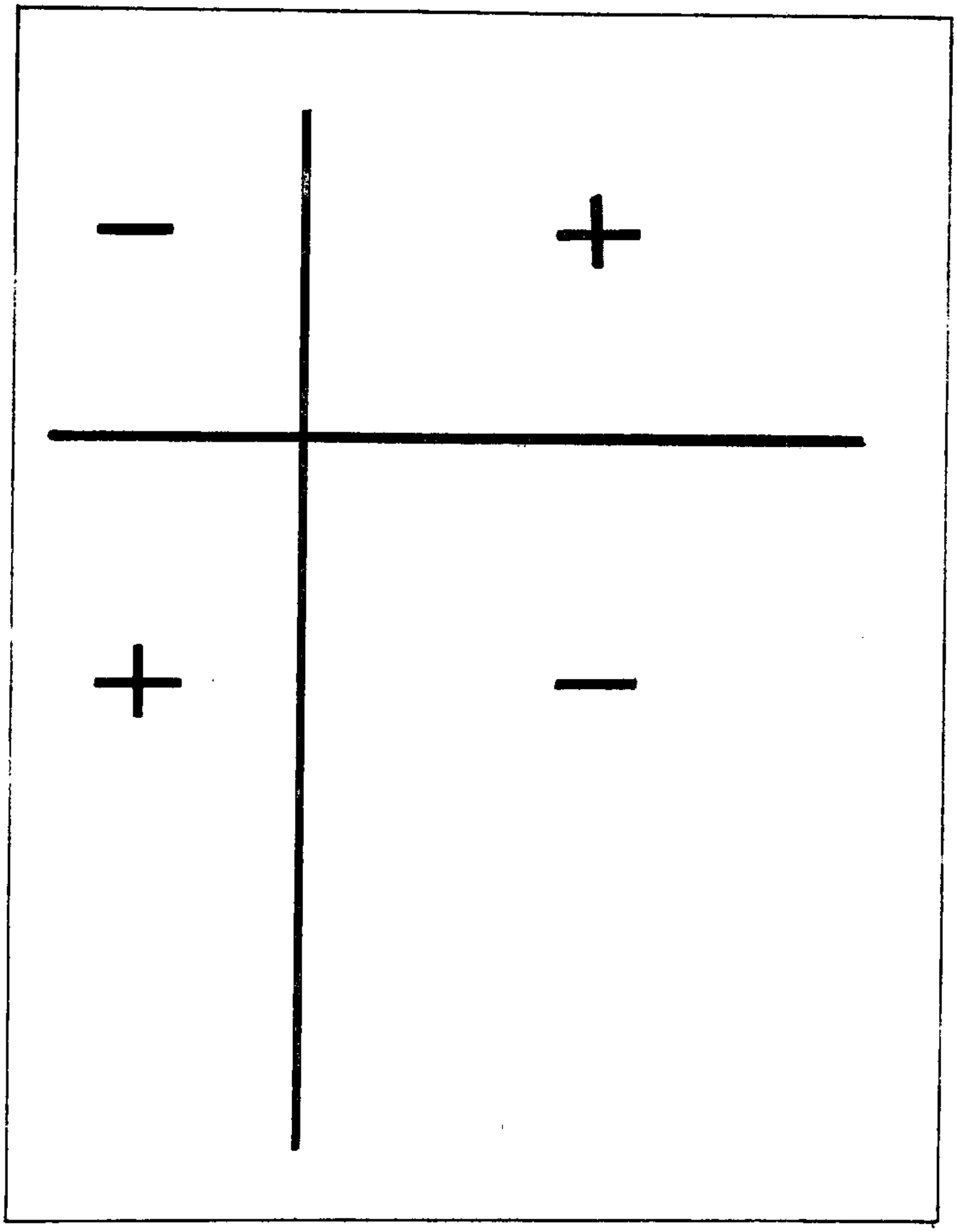

Figura 8 . Formato de plástico transparente que se utiliza sobrepuesto para obtener los valores críticos de los análisis de suelos.

El nivel crítico obtenido depende del extractante usado así como del cultivo involucrado. En la práctica, el diagrama de dispersión de Cate-Nelson provee una técnica simple, pero altamente efectiva, para evaluar los métodos analíticos de los suelos. Un buen extractante del suelo para cualquier nutriente deberá proveer una división casi perfecta entre las categorías diferentes de suelo-cultivo" (24).

Estimación de Ecuaciones Promedio de Respuesta.

A partir de un grupo de ecuaciones de respuestas que han sido calculadas para una serie de ensayos individuales, se puede llegar a una ecuación general de respuesta, la cual refleja condiciones similares según los criterios de agrupación escogidos. Dichos criterios pueden ser características fisicoquímicas del suelo, condiciones climáticas, regiones geográficas, semestre, etc.

El procedimiento utilizado es el cálculo del promedio aritmético simple para los diferentes parámetros de las ecuaciones: rendimiento-umbral, pendiente, rendimiento máximo estable y nivel óptimo de nutrimentos, en la siguiente forma:

Para la ecuación general:

$Y = a + b X$ (Y máx. est./X ópt.)

1) Rendimiento umbral promedio $= \frac{1}{n} \sum_{i=1} Y_i$

2) Pendiente Promedio $= \frac{1}{n} \sum_{i=1} b_t$

3) Rendimiento Máximo estable promedio $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}$ Y máx.est., i

4) Nivel óptimo promedio de Nutrimento = X ópt. $= \frac{(3) - (1)}{(2)}$

$$X.\ \text{ópt.} = \frac{Y.\ \text{max. est. Promedio} - Y\ \text{umbral promedio}}{\text{Pendiente Promedio}}$$

Los dos modelos presentados en la discusión anterior; son empleados como herramientas de análisis por el investigador para basar sus recomendaciones sobre uso de fertilizantes. Este análisis debe complementar los aspectos agronómicos observados y estudiados en la experimentación biológica.

En resumen, las principales consideraciones para elaborar recomendaciones son:

1. Escogencia de modelos adecuados (generales, válidos).

2. Inclusión de precios relevantes para el producto y los fertilizantes.

3. Consideraciones sobre la conveniencia económica de usar el fertilizante. Estas se basan en el cálculo de los ingresos netos adicionales esperados al emplear el fertilizante y en el cálculo de la relación beneficio-costo, como una medida del nivel de rriesgo involucrado al aplicar los niveles de nutrimento considerados óptimos.

7. BIBLIOGRAFIA

1. ACOSTA, J., V. FLOREZ et al. 1976. Adeministración de Empresas Agropecuarias. ICA, División de Estudios Socioeconómicos, Tibaitatá. pp. 8-46.

2. BADGER, D. 1969. La interpretación de los resultados. ICA, Departamento Economía Agrícola, Tibaitatá. 10 p. (Mimeografiado).

3. CARRASCO, A. 1964. Economía de la fertilización. Fac. de Agronomía, Universidad Nacional. Bogotá. 19 p. (Mimeografiado).

4. CATE Jr., R.B. 1971. Improving the interpretation of soil fertility correlation data - A comparison of continuous and discontinuous models, using a variety of data sets. Ph.D. Thesis. North Carolina St. Univ.; Raleigh. 104 p.

5. COLYER, D. and E.M. KROTH. 1968. "Corn yield response and economic optima for Nitrogen treatments and plant population over a seven-year period". Agronomy Journal, 60: 524-529.

6. CHURCHMAN, CH.W. 1957. Introduction to operations research. Wiley, New York. 645 p.

7. DAVIDSON, B.R. and B.R. Martin. 1963. The relationships between yields on farms and in experiments. Australian Journal of Agricultural economics. 129-140.

8. DILLON, J. 1968. The analisis of response in crop and livestock production. Pergamon Press. 116 p.

9. DRISCOLL, J. 1970. El método abreviado de Doolittle. ICA, Departamento de Economía Agrícola, Tibaitatá. 6 p. (Mimeografiado).

10. GUATEMALA. INSTITUTO DE CIENCIA Y TECNOLOGIA AGRICOLAS. 1974. Programa de Nutrición Vegetal. Informe Anual, 1973. Guatemala. 76 p.

11. HEADY, E.O. 1952. Economics of agricultural production and resource use. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 850 p.

12. HEADY, E. and J. DILLON. 1969. Agricultural production functions. Iowa State University Press; Ames, Iowa. 643 p.

13. HILDEBRAND, P. 1971. Un diseño experimental para mejorar recomendaciones en fertilización. ICA, Regional Nº 5. Informe Nº 2. 13 p.

14. HILDEBRAND, P. y A. GALLO. 1972. Métodos de análisis para superficies de respuesta". Primera parte. ICA, Regional Nº 5. Informe No. 7. 21 p.

15. ICA. 1965. Algunos aspectos del análisis de suelos. Centro Nacional de Investigaciones Agropecuarias, Tulio Ospina, Medellín. 102 p.

16. I.B.M. 1966. Concepts and applications of regression analysis. Technical Publications Department, 112 East Post Road, Wite Plains, N.Y. 47 p.

17. LOPERA, J. y P. HILDEBRAND. 1970. La brecha en la productividad agrícola en Colombia. ICA, Departamento de Economía Agrícola, Tibaitatá. Boletín Técnico N° 7. 36 p.

18. MARIN, G.G. ORTIZ, R. LORA y E. OWEN. 1975. El análisis de Suelos y las recomendaciones de fertilizantes y cal. Tercera aproximación. ICA, Tibaitatá. 26 p.

19. NORTH CAROLINA. 1973. Agronomic-economic research on tropical soils. Annual Report. North Carolina State Univ. Raleigh. 190 p.

20. NORTH CAROLINA. 1972. A user's guide to the statistical analysis sistem. Department of Statistics, North Carolina, St. Univ., Raleigh. 260 p.

21. RINCON, P. y P. HILDEBRAND. 1971. Análisis económico de la fertilización nitrogenada en pasto peludo (Brachiaria decumbens). ICA, Regional N° 5. 12 p.

22. TISDALE, S.L. and W.L. NELSON. 1966. Soil fertility, and fertilizers. Mcmillan, New York. 694 p.

23. VALDERRAMA, MARIO. 1973. Economics of selected inputs in small and large farms in the Sabana de Bogotá. Ph.D. Thesis.Univ. of Nebraska. Lincoln, Neb. 101 p.

24. WAUGH, D., R.B. CATE Jr. and L.A. NELSON. 1973. Modelos discontinuos para una rápida correlación y utilización de los datos de análisis de suelos y la respuesta a los fertilizantes. Tech. Bull. N° 7, North Carolina St. Univ. Raleigh. 106 p.

25. ZAFFANELLA, M. 1968. Fertilización nitrogenada en maíz en la región de Pergamino. INTA. Doc. Int. N° 10. 16 p.